7. Rechenübung aus Statistischer Physik

1. Betrachten Sie ein ideales Bosegas in einer harmonischen Falle. Die Bosonen im Gas sind ununterscheidbar und die Hamiltonfunktion jedes Bosons ist gegeben durch

$$H_i = \frac{p_{x,i}^2 + p_{y,i}^2 + p_{z,i}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\, \omega_{xy}^2 (x_i^2 + y_i^2) + \frac{1}{2} m\, \omega_z^2 z_i^2 \, .$$

Wenn $\omega_{xy} \gg \omega_z$, ist das Gas quasi-eindimensional. Nehmen Sie im Folgenden an, dass $\omega_{xy} = 10\omega_z$.

   (a) Schreiben Sie die Eigenenergie $\varepsilon_{n_x,n_y,n_z}$ eines Teilchens an. Schreiben Sie auch die Matrixelemente des Hamiltonoperators vom gesamten Gas ($\sum_i H_i$) und der Dichtematrix (großkanonisches Ensemble) in der Besetzungszahl-Darstellung an.

   (b) Zeigen Sie, dass das großkanonische Potential gegeben ist durch

$$J = k_B T \sum_{n_x,n_y,n_z} \ln \Big(1 - \exp\Big[-\beta\left(\varepsilon_{n_x,n_y,n_z} - \mu\right)\Big]\Big) \, .$$

   (c) Berechnen Sie die mittlere Teilchenzahl $\langle N_{n_x,n_y,n_z} \rangle$ im Zustand (n_x, n_y, n_z) und zeigen Sie, dass im Limes $T \to 0$ die Teilchenzahl im Grundzustand zu $-k_B(d\mu/dT|_{T=0})^{-1}$ konvergiert. Nehmen Sie an, dass $\lim_{T\to 0} \mu(T) = \varepsilon_{0,0,0}$.

   (d) Berechnen Sie die Zustandsdichte $D_0(\varepsilon)$ im μ-Raum (die Anzahl der Zustände pro Energieeinheit). Verwenden Sie für die Zustandsdichte entweder die Anzahl der quantenmechanischen Zustände oder die klassische Nährung. Im Limes $\varepsilon \gg \varepsilon_{0,0,0}$ ergeben die beide Rechnungen das gleiche Ergebnis.

   (e) Berechnen Sie die mittlere Teilchenzahl $\langle N_e \rangle \equiv \langle N \rangle - \langle N_{0,0,0} \rangle$ in allen angeregten Zuständen im Limes $\mu(T) \to \varepsilon_{0,0,0}$ und zeigen Sie, dass $\langle N_e \rangle < \infty$. (Die Bedingung $\langle N_{0,0,0} \rangle \gg \langle N_e \rangle$ im Limes $T \to 0$ ist ein Anzeichen eines Bose-Einstein-Kondensats.)

   Hinweis: $\int_0^\infty x^2/(e^x - 1)dx \simeq 2.4$