4. Plenum **für 08.04.2011**

P4.1 Γ-Funktion

Siehe Anhang A.3 im Skriptum.
Ergänzung: Berechnung von $\Gamma(1/2)$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-u^2} 2u \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

Hierbei wurde die Variablentransformation verwendet

$$u = t^{1/2}, \quad u^2 = t, \quad 2u\mathrm{d}u = \mathrm{d}t,$$

und das Gauß'sche Integral, dessen Quadrat folgendermaßen berechnet wird:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} \mathrm{d}u\right)^2 &= \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r e^{-r^2} \\
&= 2\pi \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{2r} r e^{-s} = \pi \int_0^\infty \mathrm{d}s e^{-s} = \\
&= \pi\Gamma(1) = \pi
\end{aligned}$$

wobei die Variablentransformation

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

verwendet wurde, mit der Transformation des Flächenelements über die Jacobi-Determinante,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x\mathrm{d}\varphi &= \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial x}{\partial r}\right|_\varphi & \left.\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right|_r \\ \left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_\varphi & \left.\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right|_r \end{vmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \left(r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi\right) \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi,
\end{aligned}$$

und die Substitution $r^2 = s$, $2r\mathrm{d}r = \mathrm{d}s$ verwendet wurde.

P4.2 Berechnung des d-dimensionalen Kugelvolumens

Siehe Anhang A.4 im Skriptum.
Bekannte Beispiele:

$$\begin{aligned} V_0(R) &= 1 \\ V_1(R) &= 2R \quad (\text{Strecke in 1 Dimension zwischen } -R \text{ und } +\text{R}) \\ V_2(R) &= \pi R^2 \quad (\text{Fläche einer Kreisscheibe}) \\ V_3(R) &= \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (\text{Volumen einer Kugel}) \end{aligned}$$

Über die Rekursionsrelation

$$V_d(1) = \frac{2\pi V_{d-2}(1)}{d},$$

das Skalierverhalten $V_d(R) = V_d(1)R^d$, und den oben gegebenen Anfangsbedingungen lässt sich die allgemeine Formel schreiben:

$$\begin{aligned} V_d(R) &= \frac{\pi^{d/2} R^d}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \\ &\rightarrow \frac{\pi^{d/2} R^d}{(d/2)!} \quad (\text{für } d \text{ gerade}). \end{aligned}$$

Das „Volumen“ einer 0-dimensionalen Kugel erhält man durch Anwendung der Rekursionsrelation wie folgt:

$$\pi R^2 = V_2(R) = \frac{2\pi}{2} R^2 V_0(R) \quad \rightarrow \quad V_0(R) = 1.$$

Das Volumen der Kugel in 3 Dimensionen lässt sich auch überprüfen:

$$V_3(R) = \frac{2\pi}{3} R^2 V_1(R) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

P4.3 Stirling-Formel

Siehe Anhang A.5 im Skriptum.
Das Integral von $\ln x$ erhält man durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \ln n! &= \sum_{x=1}^{n} \ln x \\ &\approx \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x \\ &= x \ln x|_1^n - \int_1^n x \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\ &= n \ln n - 0 - [x|_1^n] \\ &= n \ln n - n + 1 \end{aligned}$$