1. Tutorium - Lösungen **18.03.2011**

1.1 Legendretransformation

a)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} = Nk_B \frac{3}{2}\frac{1}{E} = \frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad E = \frac{3}{2}Nk_BT$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(1/T,V,N) &= S(E,V,N) - \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} E \\
&= Nk_B\left\{\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m}{3Nh^2}\frac{3}{2}Nk_BT\right)^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{5}{2}\right\} - \frac{1}{T}\frac{3}{2}Nk_BT \\
&= Nk_B\left\{\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi m k_BT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] + 1\right\}
\end{aligned}$$

b)

$$E(S,V,N) = \frac{3Nh^2}{4\pi m}\left(\frac{N}{V}\exp\left[\frac{S}{Nk_B} - \frac{5}{2}\right]\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{3Nh^2}{4\pi m}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}\exp\left[\frac{2}{3}\frac{S}{Nk_B} - \frac{5}{3}\right]$$

Lösungsweg 1 (explizit ausgerechnet):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} &= \frac{3Nh^2}{4\pi m}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}\exp\left[\frac{2}{3}\frac{S}{Nk_B} - \frac{5}{3}\right]\frac{2}{3}\frac{1}{Nk_B} = T \\
\rightarrow &\quad S = \frac{3Nk_B}{2}\left(\ln\left[\frac{2\pi m k_BT}{h^2}\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{2}{3}}\right] + \frac{5}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(T,V,N) &= E(S,V,N) - \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} S \\
&= \frac{3}{2}Nk_BT - T\frac{3Nk_B}{2}\left(\ln\left[\frac{2\pi m k_BT}{h^2}\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{2}{3}}\right] + \frac{5}{3}\right) \\
&= -T\frac{3Nk_B}{2}\left(\ln\left[\frac{2\pi m k_BT}{h^2}\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{2}{3}}\right] + \frac{2}{3}\right) \\
&= -Nk_BT\left(\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi m k_BT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] + 1\right)
\end{aligned}$$

Lösungsweg 2 (eleganter):

$$\begin{aligned}
F(T,V,N) &= E(S,V,N) - \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} S \\
&= -\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N}\left(S - E\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}\right) \\
&= -T\tilde{S}(1/T,V,N)
\end{aligned}$$

1.2 Heißluftballon

Für das ideale Gas gilt:

$$pV = Nk_BT \quad \rightarrow p = \frac{N}{V}k_BT$$

$$\rho_{Luft} = \frac{m_{Luft}}{V} = \frac{nM_{Luft}}{V} = \frac{NM_{Luft}}{N_AV} \quad \rightarrow \quad \frac{N}{V} = \frac{N_A\rho_{Luft}}{M_{Luft}}$$

wobei M_{Luft} die molare Masse und $n = N/N_A$ die Stoffmenge ist. Weil der Druck innerhalb und außerhalb des Ballons gleich ist (Dichte im Inneren: ρ):

$$p = p_0 \quad \rightarrow \quad \frac{N_A\rho}{M_{Luft}}k_BT = \frac{N_A\rho_0}{M_{Luft}}k_BT_0 \quad \rightarrow \quad T\rho = T_0\rho_0 \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{T_0}{T}\rho_0$$

Die Schwerkraft beträgt $F_1 = mg$ und der entgegengesetzt zeigende Auftrieb beträgt $F_2 = Vg(\rho_0 - \rho)$. Damit die Masse getragen wird, muss gelten

$$F_1 < F_2 \quad \rightarrow \quad Mg < Vg(\rho_0 - \rho) \quad \rightarrow \quad M < V(\rho_0 - \rho) = \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)V\rho_0$$

Da im Inneren und Äußeren der gleiche Druck $p_1 = p_2$ herrscht, handelt es sich um ein mechanisches Gleichgewicht. (Thermisch: $T_1 = T_2$; chemisch: $\mu_1 = \mu_2$). Allerdings wird sich nach einem längeren Zeitraum ein thermisches und chemisches Gleichgewicht einstellen, und der Ballon herunterfallen.

1.3 Wärmeverbrauch

(a) $dQ = dE = (3/2)Nk_BdT$ (V: fest, d.h. keine Arbeit wird verrichtet)

$$\Delta Q = \Delta E = \int_{T_1}^{T_2} \frac{3}{2}Nk_BdT = \frac{3}{2}Nk_B(T_2 - T_1)$$

(b) $dQ = dE + P_1dV = (3/2)Nk_BdT + P_1(Nk_B/P_1)dT$

$$\Delta E = \int_{T_1}^{T_2} \frac{3}{2}Nk_BdT = \frac{3}{2}Nk_B(T_2 - T_1)$$

$$\Delta Q = \Delta E + \int_{T_1}^{T_2} P_1(Nk_B/P_1)dT = \frac{5}{2}Nk_B(T_2 - T_1)$$

(c) $dQ = (3/2)N(T)k_BdT$ (V: fest, d.h. keine Volumenarbeit wird geleistet. Arbeit im Sinn der Teilchenzahländerung $dW = \mu dN$ wird schon geleistet.)

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} \frac{3}{2}N(T)k_BdT = \int_{T_1}^{T_2} \frac{3}{2}\frac{P_1V_1}{k_BT}k_BdT = \frac{3}{2}P_1V_1 \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Die innere Energie hängt vom betrachteten System ab. Innerhalb des Zimmers bleibt die innere Energie konstant.

$$\Delta E = \frac{3}{2}N(T_2)k_BT_2 - \frac{3}{2}N(T_1)k_BT_1 = 0$$

Wenn man aber das Gesamtsystem betrachtet, dann ist $\Delta E' = \Delta Q$ die Veränderung der inneren Energie des Gases im Zimmer plus dem, was durch das Loch ausgelaufen ist.