2. Tutorium **für 25.03.2011**

2.1 Jacobi-Determinante

x und y seien Funktionen von u und v, also $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$.
a) Zeige, dass

$$\left.\frac{\partial v}{\partial u}\right|_y = -\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_u \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_v .$$

(Hinweis: Betrachte den Fall, dass das totale Differential dy null ist).
b) Zeige, dass

$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_u ,$$

wobei

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| := \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_v & \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_u \\ \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_v & \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_u \end{vmatrix}$$

die Jacobi-Determinante ist.

2.2 Van-der-Waals Gas

Reale Gase können recht gut durch die Van-der-Waals-Gleichung beschrieben werden

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

wobei $n \equiv N/N_A$ die Stoffmenge beschreibt.
*) (freiwillig): Was beschreiben die Parameter a und b physikalisch?
a) Das Gas wird isotherm vom Volumen V_1 auf ein Volumen V_2 ausgedehnt. Berechne die Änderung der freien Energie.
b) Zeige, dass sich die isotherme Änderung der inneren Energie bei konstanter Teilchenzahl schreiben lässt als:

$$\left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_{N,T} = T \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_{N,V} - p.$$

c) Berechne damit die isotherme Änderung der inneren Energie bei der Ausdehnung vom Volumen V_1 auf V_2.

d) Am kritischen Punkt des Gases gilt:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_{N,T} = 0 \quad \text{und} \quad \left.\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right|_{N,T} = 0.$$

Berechne das zu diesem Punkt gehörende kritische Volumen V_c, die kritische Temperatur T_c und den kritischen Druck p_c.

e) Berechne die isothermische Kompressibilität $\kappa_T = \kappa_T(T, V, N)$ mit

$$\kappa_T^{-1} = -V \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_{N,T}$$

und bestimme den kritischen Exponenten γ in der Nähe des kritischen Punktes, an welchem $\kappa_T = \kappa_T(T, V_c, N) \sim |T - T_c|^{-\gamma}$ gilt.

Ankreuzbar: 1a, 1b, 2a, 2bc, 2de