

## 4. Tutorium

für 08.04.2011

## 4.1 Einstein-Modell

Das Einstein-Modell beschreibt einen Festkörper durch  $N$  Oszillatoren mit der Frequenz  $\omega$ . Die Hamiltonfunktion des Festkörpers ist gegeben durch

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \right)$$

a) Berechne das Phasenraumvolumen  $\Phi(E)$  und die Anzahl der Zustände  $\Omega(E; \Delta)$ . Das System ist im mikrokanonischen Ensemble ( $H = E$ ). Hinweis: Die Formel für die Berechnung des Volumens einer  $d$ -dimensionalen Kugel findet sich im Anhang A.4 des Skriptums.

b) Berechne die Entropie  $S(E, V, N)$ . Bilde den Limes für große Teilchenzahl mit Hilfe der Stirling-Formel.

c) Leite aus der erzeugenden Funktion  $S(E, V, N)$  die Relationen für Temperatur und Druck ab. Überrascht das Ergebnis für den Druck?

d) Berechne mit Hilfe der kalorischen Zustandsgleichung  $E(T, V, N)$  die Wärmekapazität  $C_V$ .

e) Der Festkörper ist durch eine wärmeleitende Wand von einem idealen Gas getrennt. Das Gesamtsystem hat die Energie  $E' (> E)$ . Das Gas von  $N''$  Teilchen und der Energie  $E''$  befindet sich in einem Volumen  $V''$ . Berechne die Aufteilung der Gesamtenergie.

Hinweis: Die Anzahl der Zustände des Gases ist gegeben durch

$$\Omega_{\text{gas}} = \frac{1}{N''!} \frac{1}{h^{3N''}} V^{N''} \frac{(2\pi m E'')^{3N''/2}}{(3N''/2) \Gamma(3N''/2)}.$$

4.2 Zweidimensionales Gas<sup>1</sup>

Gegeben sei ein Gas, das aus  $N$  zweiatomigen Molekülen in einem zweidimensionalen Kasten (Volumen:  $V$ ) besteht. Wenn die Schwingung zwischen den zwei Atomen eines Moleküls eingefroren ist und nur die Translationen  $(x_i, y_i)$  und Drehungen  $(\theta_i \in [0, 2\pi])$  der Moleküle betrachtet werden, lautet die Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_{x,i}^2}{2m} + \frac{p_{y,i}^2}{2m} + \frac{L_i^2}{2I} \right).$$

---

<sup>1</sup>Früheres Testbeispiel.

$L$  ist der Drehimpuls und  $I$  das Trägheitsmoment. Es gibt keine Wechselwirkung zwischen den Molekülen.

a) Berechne die Anzahl der Zustände auf der Energieschale  $[E - \Delta, E]$ . Nimm an, dass  $N \gg 1$ .

b) Berechne die Entropie  $S$ , die Temperatur  $T$  und die Wärmekapazität  $C_V$  des Systems.

---

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 1e, 2a, 2b