6. Tutorium **für 27.05.2011**

6.1 Harmonische Falle

Gegeben sei ein ideales Gas in einer harmonischen Falle. Die Hamiltonfunktion jedes Teilchens im Gas ist gegeben durch

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + V(x,y,z) \quad \text{mit}\, V(x,y,z) = m\omega^2 \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

Das Gas ist in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T und mit einem Teilchenbad des chemischen Potentials μ (d.h. der Austausch von Teilchen mit dem Teilchenbad ist zugelassen).
a) Berechne die großkanonische Zustandssumme für ein klassisches System von punktförmigen Teilchen.
b) Zeige, dass

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{GK} + \mu \langle N \rangle ,$$

und berechne damit den Mittelwert der gesamten Energie des Gases $\langle E \rangle$.
c) Berechne das Phasenraumvolumen $\Phi(E)$ und die Zustandsdichte

$$D(E) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Omega(E;\Delta)}{\Delta} = \frac{1}{N! h^{DN}} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}E}$$

für ein einzelnes Teilchen ($N = 1$) in einer D-dimensionalen harmonischen Falle. (Dieses Resultat wird in 6.2cd benötigt).

BITTE WENDEN

6.2 Bose-Einstein Kondensation

Gegeben sei die gleiche Hamiltonfunktion wie in Beispiel 6.1, nur sind die Teilchen ununterscheidbare Bosonen.

a) Berechne die großkanonische Zustandssumme für ein ideales Bosegas.

b) Berechne den Erwartungswert der Anzahl der Bosonen N_{n_x,n_y,n_z} im Zustand[1] (n_x, n_y, n_z).

c) Bose-Einstein-Kondensation wird beobachtet, wenn im Limes $T \to 0$ die Anzahl der Bosonen im Grundzustand $\langle N_{0,0,0} \rangle$ (viel) größer als die Anzahl in angeregten Zuständen

$$\langle N_{\epsilon>0} \rangle = \sum_{(n_x,n_y,n_z)\neq(0,0,0)} \left\langle N_{n_x,n_y,n_z} \right\rangle$$

wird. Bose-Einstein-Kondensation kann angenommen werden, wenn die Anzahl der Bosonen im Grundzustand im Limes $T \to 0$ und $\mu(T) \to \mu_c$ divergiert ($\langle N_{0,0,0} \rangle \to \infty$) während die Anzahl in den angeregten Zuständen endlich bleibt. Wie groß ist der kritische Wert des chemischen Potentials μ_c für das Bosegas in der harmonischen Falle? Zeige durch Näherung der Summe durch ein geeignetes Integral, dass im Limes $\mu(T) \to \mu_c$ gilt

$$\langle N_{\epsilon>0} \rangle \to \zeta(3) \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 .$$

d) Kann in einer in zwei- oder eindimensionalen harmonischen Falle ein Bose-Einstein-Kondensat entstehen?

Hinweise:
$\int_0^\infty x^2/\left(e^x - 1\right) \mathrm{d}x = 2\zeta(3) \approx 2.40$,
$\int_0^\infty x/\left(e^x - 1\right) \mathrm{d}x = \zeta(2) = \pi^2/6 \approx 1.64$,
Riemannsche Zetafunktion: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$.

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 2a, 2b, 2cd

[1] Die Quantenzahlen $n_x \geq 0$, $n_y \geq 0$, und $n_z \geq 0$ nummerieren die jeweiligen Eigenzustände des harmonischen Oszillators in x-, y-, und z-Richtung.