7. Tutorium **für 10.06.2011**

7.1 Maxwellscher Dämon

a) Skizziere das Prinzip des Maxwellschen Dämons, und erläutere eigene und/oder historische Einwände und deren mögliche Auflösungen[1].
b) Welche Argumente werden im Artikel „What Maxwell's demon could do for you" (http://arxiv.org/abs/1105.4768) angeführt, um den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu umgehen?
*) Wie könnte man für oder gegen diesen Artikel argumentieren?

7.2 Hohlraumstrahlung

Die Hamiltonfunktion eines Photonengases lautet[2]

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},\sigma} \hbar\omega_{\vec{k}} \left[\hat{N}_{\vec{k},\sigma} + \frac{1}{2} \right],$$

wobei $\hat{N}_{\vec{k},\sigma}$ als Operator die Anzahl der Photonen mit Wellenvektor $\vec{k}$ und Polarisation $\sigma = 1, 2$ beschreibt[3]. Das Photonengas befinde sich in einem Hohlraum mit Volumen V.
a) Wie lautet die großkanonische Zustandssumme des Photonengases? (Hier soll angenommen werden, dass das Volumen V endlich ist und die Wellenvektoren $\vec{k}$ quantisiert sind, sodass nur eine abzählbare Menge von Wellenvektoren mit zugehörigen Polarisationen zulässig ist, etwa $(\vec{k}_1, \sigma_1)$, $(\vec{k}_2, \sigma_2)$, $(\vec{k}_3, \sigma_3)$, ... Auch verschwindet das chemische Potential für Photonen $\mu = 0$.)
b) Berechne das großkanonische Potential $J(T, V, \mu)$ und daraus die Entropie S des Photonengases. Wie verhält sich die Entropie im Limes $T \to 0$?
c) Zeige, dass der Erwartungswert für die Anzahl der Photonen mit Wellenvektor $\vec{k}$ und Polarisation σ gegeben ist durch

$$\left\langle N_{\vec{k},\sigma} \right\rangle = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1}.$$

[1] Siehe (http://www.itp.tuwien.ac.at/Statistische_Physik_I#Vorlesungsfolien) Vorlesung vom 25. Mai 2011.

[2] Die Hamiltonfunktion ist bereits für den Fockraum angegeben, da ja eine variable Anzahl von Teilchen involviert ist. Siehe Skriptum Anhang A.7 „Quantization of the free electromagnetic field".

[3] Die zugehörigen Polarisationsvektoren $\vec{\hat{e}}_{\vec{k},\sigma}$ sind orthogonal zueinander und orthogonal zur Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$.

d) Die spektrale Intensität für die aus einem kleinen Loch austretende Hohlraumstrahlung pro Frequenzbereich $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$ und Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ ist gegeben durch ($\nu = \omega_k/(2\pi)$)

$$I(\nu, T) = \frac{h\nu^3}{c^2} \sum_{\sigma=1,2} \left\langle N_{\vec{k},\sigma} \right\rangle .$$

Für welche Frequenz $\nu_{\max}$ wird die spektrale Intensität $I(\nu, T)$ maximiert?
e) Berechne die gesamte Strahlungsleistung pro Abstrahlfläche A nach folgender Formel (Stefan-Boltzmann Gesetz)

$$\frac{P}{A} = \int_0^\infty \mathrm{d}\nu \int_0^{\pi/2} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \cos\theta I(\nu, T).$$

(Der Faktor $\cos\theta$ berücksichtigt dabei, dass die Abstrahlung in eine beliebige gegebene Richtung nur die auf dieser Richtung senkrecht stehende Projektion der Fläche A als effektive Strahlfläche auftritt.)
Hinweise:
$(3 - x)\, e^x = 3$ hat zwei Lösungen: $x = 0$ und $x \approx 2,82$.
$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^3/\left(e^x - 1\right) = \pi^4/15$.

Ankreuzbar: 1ab, 2a, 2b, 2c, 2de