7. Tutorium - Lösungen **10.06.2011**

7.1 Maxwellscher Dämon

a) Siehe Wikipedia Artikel zu „Maxwellscher Dämon“.

b) Die Entropie innerhalb des Kopfes des Dämons könnte klein gegenüber dem Rest des Systems sein.

Das Wissen, das der Dämon erlangt, könnte informationstechnisch komprimiert werden, um die zu löschende Informationsmenge zu reduzieren.

*) Zur Diskussion.

7.2 Hohlraumstrahlung

a) Großkanonische Zustandssumme ($\mu = 0$): Spur tr(...) geht über alle Kombinationen von Photonenzahlen und Polarisationen $\{N_{\vec{k},\sigma}\}$.

$$
\begin{aligned}
Z_{GK} &= \operatorname{tr}\left(e^{-\beta\left(\hat{H}-\mu\hat{N}\right)}\right) \overset{(\mu=0)}{=} \operatorname{tr}\left(e^{-\beta\hat{H}}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(e^{-\beta\sum_{\vec{k},\sigma}\hbar\omega_{\vec{k}}\left[\hat{N}_{\vec{k},\sigma}+\frac{1}{2}\right]}\right) \\
&= \sum_{N_{\vec{k}_1,\sigma_1}}\sum_{N_{\vec{k}_2,\sigma_2}}\sum_{N_{\vec{k}_3,\sigma_3}}\cdots\prod_{\vec{k},\sigma}\exp\left(-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}\left[\hat{N}_{\vec{k},\sigma}+\frac{1}{2}\right]\right) \\
&= \prod_{\vec{k},\sigma}\sum_{N_{\vec{k},\sigma}}\exp\left(-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}\left[\hat{N}_{\vec{k},\sigma}+\frac{1}{2}\right]\right) \\
&= \prod_{\vec{k},\sigma}\exp\left(-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}\frac{1}{2}\right)\sum_{N_{\vec{k},\sigma}}\exp\left(-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}\hat{N}_{\vec{k},\sigma}\right) \\
&= \prod_{\vec{k},\sigma}e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}/2}\frac{1}{1-\exp\left(-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}\right)} \\
&= \prod_{\vec{k}}\left(\frac{e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}/2}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}}\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Zum Schluss wurde über $\sigma = 1, 2$ multipliziert.

b) Großkanonisches Potential:

$$
\begin{aligned}
J &= -\frac{1}{\beta}\ln Z_{GK} \\
&= \sum_{\vec{k}}\hbar\omega_{\vec{k}} + \frac{2}{\beta}\sum_{\vec{k}}\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}\right) .
\end{aligned}
$$

Entropie:

$$
\begin{aligned}
S &= -\left.\frac{\partial J}{\partial T}\right|_{V,\mu} \\
&= -\frac{\partial}{\partial T}\left[2k_BT\sum_{\vec{k}}\ln\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{k_BT}}\right)\right] \\
&= -2k_B\sum_{\vec{k}}\ln\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{k_BT}}\right)-2k_BT\sum_{\vec{k}}\frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{k_BT}}}\left(-e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{k_BT}}\right)\left(+\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{k_BT^2}\right) \\
&= -2k_B\sum_{\vec{k}}\left[\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}\right)-\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{k_BT}\frac{e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}}\right].
\end{aligned}
$$

Im Limes $T\to 0$ gilt $e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}\to 0$ (exponentiell). Daher verschwindet der letzte Term (trotz $1/T$), und der erste Term $\sum\ln 1{=}0$ verschwindet ebenfalls. Daher verschwindet die Entropie $S\to 0$ in Übereinstimmung mit Nernst-Theorem.

c) Erwartungswert für ein bestimmtes $\vec{k},\sigma$:

$$
\begin{aligned}
\left\langle N_{\vec{k},\sigma}\right\rangle &= \frac{\operatorname{tr}\left(N_{\vec{k},\sigma}e^{-\beta\left(\hat{H}-\mu\hat{N}\right)}\right)}{\operatorname{tr}\left(e^{-\beta\left(\hat{H}-\mu\hat{N}\right)}\right)} \overset{(\mu=0)}{=} \frac{\operatorname{tr}\left(N_{\vec{k},\sigma}e^{-\beta\hat{H}}\right)}{\operatorname{tr}\left(e^{-\beta\hat{H}}\right)} \\
&= \frac{\left[\sum_{N_{\vec{k},\sigma}}N_{\vec{k},\sigma}\exp\left(-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}\left[\hat{N}_{\vec{k},\sigma}+\frac{1}{2}\right]\right)\right]\prod_{(\vec{k}',\sigma')\neq(\vec{k},\sigma)}\left[\sum_{N_{\vec{k}',\sigma'}}\exp\left(-\beta\hbar\omega_{\vec{k}'}\left[\hat{N}_{\vec{k}',\sigma'}+\frac{1}{2}\right]\right)\right]}{\prod_{\vec{k},\sigma}\sum_{N_{\vec{k},\sigma}}\exp\left(-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}\left[\hat{N}_{\vec{k},\sigma}+\frac{1}{2}\right]\right)} \\
&= \frac{\sum_{N_{\vec{k},\sigma}}N_{\vec{k},\sigma}\exp\left(-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}\left[\hat{N}_{\vec{k},\sigma}+\frac{1}{2}\right]\right)}{\underbrace{\sum_{N_{\vec{k},\sigma}}\exp\left(-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}\left[\hat{N}_{\vec{k},\sigma}+\frac{1}{2}\right]\right)}_{=:z_{\vec{k},\sigma}}} \\
&= \frac{-\frac{1}{\hbar\omega_{\vec{k}}}\frac{\partial}{\partial\beta}z_{\vec{k},\sigma}-\frac{1}{2}z_{\vec{k},\sigma}}{z_{\vec{k},\sigma}} \\
&= -\frac{1}{\hbar\omega_{\vec{k}}}\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(\sum_{N_{\vec{k},\sigma}}\exp\left(-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}\left[\hat{N}_{\vec{k},\sigma}+\frac{1}{2}\right]\right)\right)-\frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{\hbar\omega_{\vec{k}}}\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(\frac{e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}/2}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}}\right)-\frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{\hbar\omega_{\vec{k}}}\frac{1-e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}}{e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}/2}}\left[\frac{e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}/2}\left(-\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2}\right)}{1-e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}}-\frac{e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}/2}}{\left(1-e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}\right)^2}\left(-e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}\right)\left(-\hbar\omega_{\vec{k}}\right)\right]-\frac{1}{2} \\
&= \frac{e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}} \\
&= \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}-1}.
\end{aligned}
$$

d) Spektrale Intensität:

$$
\begin{aligned}
I(\nu,T) &= \frac{h\nu^3}{c^2}\sum_{\sigma=1,2}\left\langle N_{\vec{k},\sigma}\right\rangle \\
&= \frac{h\nu^3}{c^2}2\frac{1}{e^{\beta h\nu}-1}.
\end{aligned}
$$

Extremalwert dort wo Ableitung verschwindet:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I(\nu,T)}{\partial\nu} &= \frac{2h}{c^2}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu}-1} \\
&= \frac{2h}{c^2}\left[\frac{3\nu^2}{e^{\beta h\nu}-1} - \frac{\nu^3}{\left(e^{\beta h\nu}-1\right)^2}e^{\beta h\nu}\beta h\right] \\
&= \frac{2h}{c^2}\frac{\nu^2}{\left(e^{\beta h\nu}-1\right)^2}\left[3e^{\beta h\nu}-3-\beta h\nu e^{\beta h\nu}\right] \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Also $(3-\beta h\nu)\, e^{\beta h\nu} = 3$. Laut Hinweis ist $(3-x)\, e^x = 3$ für $x = 0$ oder $x \approx 2,82$. Die spektrale Intensität $I(\nu,T)$ verschwindet für $\nu = 0$ oder $\nu \to \infty$, und ist positive für alle $0 < \nu < \infty$. Daher liegt das Maximum bei $x = \beta h\nu \approx 2,82$.

e) Gesamte Strahlungsleistung:

$$\begin{aligned}
\frac{P}{A} &= \int_0^\infty \mathrm{d}\nu \int_0^{\pi/2} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \cos\theta I(\nu,T) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}\nu I(\nu,T) \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta}_{-\int_{-1}^{0}\xi\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi}_{2\pi} \\
&= \frac{2\pi h}{c^2}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu}-1}\mathrm{d}\nu \\
&= \frac{2\pi h}{c^2}\frac{1}{(\beta h)^4}\underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\mathrm{d}x}_{\pi^4/15} \\
&= \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2}T^4 = \sigma T^4,
\end{aligned}$$

mit den Substitutionen $\xi = \cos\theta$, $\mathrm{d}\xi = -\sin\theta\mathrm{d}\theta$, $x = \beta h\nu$, $\mathrm{d}x = \beta h\mathrm{d}\nu$.