Gerhard Kahl & Bianca M. Mladek

STATISTISCHE PHYSIK 1 (VU – 136.020)

6. Tutoriumstermin (25.5.2012)

T18. Betrachten Sie ein Teilchen, das sich in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T befindet und unter dem Einfluß eines äußeren, dreidimensionalen Potentials $V(q) = a|\mathbf{q}|^4$ steht (mit $a > 0$).

(i) Berechnen Sie die mittlere Energie und die Wärmekapazität;

(ii) Zeigen Sie, daß der Mittelwert von $|\mathbf{q}|^2$ proportional zu $(T/a)^{1/2}$ ist.

Hinweis: die Rechnungen vereinfachen sich wesentlich, wenn Sie sich auf die Temperaturabhängigkeit der Terme konzentrieren; so können Sie die Temperaturabhängigkeit durch Einführung geeigneter Variablen untersuchen, ohne explizit unangenehme Integrale auszurechnen.

T19. Gegeben ist ein Festkörper von N Teilchen, der an ein Wärmebad der Temperatur T gekoppelt ist. Der Festkörper wird im Rahmen des Einstein-Modells durch N Oszillatoren mit einer Frequenz ω beschrieben.

Zeigen Sie, daß der Mittelwert $\langle |q_{i1}| \rangle_k$ (wobei i ein beliebiger Teilchenindex ist) proportional ist zu $(k_\mathrm{B}T/m)^{1/2}\, 1/\omega$.

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |x| f(x^2) = 2\int_0^{\infty} dx x f(x^2) = \int_0^{\infty} du f(u)$$

T20. Betrachten Sie ein dreidimensionales System von klassischen Teilchen, dessen Hamilton-Funktion durch

$$\mathcal{H} = \sum_i \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{q}_i^2 \right)$$

gegeben ist. Das System ist in Kontakt mit einem Temperaturbad der Temperatur T und einem Teilchenreservoir mit chemischem Potential μ.

(i) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme des Systems.

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, $P(N)$, daß sich genau N Teilchen im System befinden; sie ist gegeben durch

$$P(N) = \frac{1}{h^{3N}N!}\int d\mathbf{p}^N d\mathbf{q}^N \rho_g(\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N)$$

Zeigen Sie, daß diese Wahrscheinlichkeitsverteilung normiert ist (also $\sum_N P(N) = 1$). Berechnen Sie weiters aus Z_g die mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle_g$ und stellen Sie $P(N)$ als Funktion von $\langle N \rangle_g$ dar. Zeigen Sie, daß es sich um eine Poisson-Verteilung handelt.

(iii) Berechnen Sie $\langle E \rangle_g$ und die Wärmekapazität des Systems.