Gerhard Kahl & Bianca M. Mladek

STATISTISCHE PHYSIK 1 (VU – 136.020)

7. Tutoriumstermin (1.6.2012)

T21. Modell für den Paramagnetismus.
N nicht-wechselwirkende Momente der Stärke μ_m befinden sich in einem homogenen Magnetfeld H, welches parallel zur z-Achse wirkt. Die Momente können die Einstellungen $s_z = s, s-1, \ldots, -s$ einnehmen.

Die Hamiltonfunktion ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = -\mu_m H \sum_{i=1}^{N} (s_z)_i$$

(i) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme Z_k durch

$$Z_k = \left[\frac{\sinh\left[x(s+1/2)\right]}{\sinh(x/2)} \right]^N$$

gegeben ist.
Hinweise:
(a) Für die bessere Übersichtlichkeit Ihrer Rechnungen verwenden Sie $x = \mu_m H/(k_B T)$.
(b) Verwenden Sie: $\sinh(a) = [\exp(a) - \exp(-a)]/2$.

(ii) Berechnen Sie sowohl die freie Energie $F(T, H)$ als auch die Magnetisierung $M(T, H) = -(\partial F/\partial H)_T$ als Funktion der Temperatur T und des Magnetfelds H.
Hinweis: $\coth(a) = \cosh(a)/\sinh(a)$

(iii) Zeigen Sie, dass M für tiefe Temperaturen T, d.h. für $T \ll \mu_m H/k_B$, gegen den Sättigungswert $N\mu_m s$ strebt.
Hinweis: $\lim_{a\to\infty} \coth(a) = 1$

(iv) Zeigen Sie, dass für hohe Temperaturen, d.h. für $T \gg \mu_m H/k_B$, das Curie-Gesetz gilt, d.h. dass für die magnetische Suszeptibilität χ_m folgende Relation gilt:

$$\chi_m = \frac{\text{const}}{T}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Taylorentwicklung $\coth(a) = 1/a + a/3 + \mathcal{O}(a^3)$ für kleine a.

T22. Zeigen Sie, dass die innere Energie $\langle E\rangle_g$ im großkanonischen Ensemble durch folgende zwei Formeln gegeben ist:

$$\langle E\rangle_g = -\left(\frac{\partial \ln Z_g}{\partial \beta}\right)_{\mu,V} + \mu\langle N\rangle_g$$

und

$$\langle E\rangle_g = -\left(\frac{\partial \ln Z_g}{\partial \beta}\right)_{z,V}$$

wobei $z = \exp(\beta\mu)$ die Fugazität und Z_g die großkanonische Zustandssumme ist. Beachten Sie die subtilen Unterschiede bei der Bildung der Ableitungen.

T23. Gegeben ist ein System von zwei nicht miteinander wechselwirkenden Teilchen, die sich in Kontakt mit einem Temperaturbad der Temperatur T befinden. Jedes der Teilchen kann sich in einem von drei Zuständen befinden, deren Energien durch 0, ϵ und 3 ϵ (mit $\epsilon > 0$) gegeben sind.

Berechnen Sie die mittlere Energie des Systems als Funktion der Temperatur, für den Fall, daß die Teilchen

(i) unterscheidbar sind;

(ii) identische Bose-Teilchen sind;

(iii) identische Fermi-Teilchen sind.

T24. Gegeben ist ein Teilchen im Potential eines quantenmechanischen, harmonischen Oszillators, das in Kontakt mit einem Temperaturbad der Temperatur T steht. Berechnen Sie die mittlere Energie und die Wärmekapazität des Teilchens.