Gerhard Kahl & Bianca M. Mladek

STATISTISCHE PHYSIK I (VU – 136.020)

2. Test am 15.6.2012

NAME: MN:

Bitte beginnen Sie jedes Beispiel auf einem neuen Blatt!

Die physikalische Bedeutung aller verwendeter Symbole muß erläutert werden!

Rechenschritte und Herleitungen von Formeln müssen in einem Maße dokumentiert sein, daß die einzelnen Schritte nachvollziehbar sind!

T1. (25 Punkte)

Gegeben ist ein ideales Gas (N Teilchen), das sich in einem drei-dimensionalen, würfelförmigen Behälter (Volumen V, Kantenlänge L) befindet. Das System ist in Kontakt mit einem Temperatur- und Teilchenbad (mit Temperatur T und chemischem Potential μ).

Berechnen Sie für dieses System mit Hilfe der großkanonischen Zustandssumme, Z_g, die kalorische und die thermische Zustandsgleichung. Dabei ist die kanonische Zustandssumme, $Z_k(N,T,V)$, explizit zu berechnen.

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \, .$$

T2. (15 Punkte)

(a) Gegeben ist ein sogenanntes Tonks-Gas von N Teilchen. Es handelt sich dabei um ein ein-dimensionales System, das bei $x = 0$ und $x = L$ durch undurchdringliche Wände begrenzt ist. Die Teilchen sind undurchdringlich: so befindet sich, zum Beispiel, das Teilchen 1 immer zwischen der Wand bei $x = 0$ und "links" von der aktuellen Position des Teilchens 2 (q_2), usf. Teilchen-Teilchen und Teilchen-Wand Stöße sind elastisch. Das System ist an ein Temperaturbad (mit Temperatur T) gekoppelt.

Beantworten Sie folgende Fragen:

(i) geben Sie den Phasenraum Γ in der Form

$$\Gamma = \left\{ (p^N, q^N) | \ldots \right\}$$

an;

(ii) berechnen Sie die mittlere Position des ersten Teilchens, also $\langle q_1^{\text{Tonks}} \rangle_k$.

(b) Gegeben ist ein ideales Gas von N Teilchen, das sich in einem eindimensionalen "Volumen" der Länge L befindet (begrenzt bei $x = 0$ und $x = L$ durch undurchdringliche Wände). Das System ist an ein Temperaturbad (mit Temperatur T) gekoppelt. Beantworten Sie folgende Fragen:

(i) geben Sie den Phasenraum Γ in der Form

$$\Gamma = \left\{ (p^N, q^N) | \ldots \right\}$$

an;

(ii) berechnen Sie die mittlere Position des ersten Teilchens, also $\langle q_1^{\text{ideal}} \rangle_k$.

(c) Vergleichen und interpretieren Sie die Ergebnisse für $\langle q_1^{\text{Tonks}} \rangle_k$ und $\langle q_1^{\text{ideal}} \rangle_k$. Geben Sie Gründe an, warum man die beiden Ergebnisse erraten hätte können.

Hinweis: überlegen Sie, ob Sie tatsächlich alle Phasenraumintegrale ausführen müssen.

T3. (20 Punkte)

Gegeben ist ein ideales Quantensystem von identischen, nicht-wechselwirkenden Teilchen, beschrieben durch den Hamilton-Operator $\hat{H} = \sum_\alpha \hat{H}_\alpha$; die nicht-entarteten und diskreten Einteilchen-Energieeigenwerte sind durch ϵ_i, $i = 0, 1, \ldots$ gegeben. Das System befindet sich in Kontakt mit einem Temperatur- und Teilchenbad (mit Temperatur T und chemischem Potential μ).

Führen Sie Besetzungszahlen ein und betrachten Sie vorerst eine Realisation des Sytems durch N Teilchen. Beantworten Sie folgende Fragen:

(i) was sind Besetzungszahlen;

(ii) welche Bedingung müssen die Besetzungszahlen bei einer Realisierung des Systems durch N Teilchen erfüllen;

(iii) wie läßt sich in diesem Fall die Gesamtenergie mit Hilfe der Besetzungszahlen ausdrücken.

Geben Sie für dieses System – nun mehr im großkanonischen Ensemble – die Formel für die großkanonische Zustandssumme, Z_g, an und vereinfachen Sie diesen Ausdruck weitest möglich, sodaß sich schlußendlich Z_g als Produkt von Faktoren schreiben läßt, wobei jeder dieser Faktor jedem der Energieniveaus zuordenbar ist. **Erklären Sie die einzelnen Schritte in einem Maße, daß sie nachvollziehbar sind.**

Nehmen Sie nun an, daß es sich bei Ihrem System um ein ideales Bose-Gas handelt. Leiten Sie explizite Ausdrücke für PV und $\langle N \rangle_g$ her.

T4. (15 Punkte)

Bei einem idealen Bose-Gas kommt es bei niedrigen Temperaturen zum s.g. Bose-Einstein Kondensat: hier ist der niedrigste Energieeigenwert, ϵ_0, durch eine makroskopisch-große mittlere Besetzungszahl, N_0, charakterisiert.

Unter vereinfachenden Annahmen gilt im großkanonischen Ensemble folgende (Bilanz-)-Formel:

$$N = \frac{V}{\Lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{z}{1-z} = N' + N_0.$$

Dabei ist N die mittlere Zahl von Teilchen, die sich im Volumen V befinden; N' ist die mittlere Besetzungszahl der angeregten Energieniveaus (also aller ϵ_i mit $i > 0$). $\Lambda = [h^2/(2m\pi k_B T)]^{1/2}$ und $z = \exp(\beta\mu)$, wobei hier $0 \leq z \leq 1$ gilt. $g_{3/2}(z)$ ist für $0 \leq z \leq 1$ eine 'brave' Funktion mit $g_{3/2}(1) = 2.612$.

Leiten Sie aus obiger Bilanz (näherungsweise) ein Ausdruck für eine Übergangstemperatur T_c zwischen zwei "Phasen" her. Erklären Sie, warum es aufgrund der Bilanzgleichung zu diesen beiden "Phasen" kommen muß und spezifizieren Sie (vorerst verbal) die Größenordnungen von N' und N_0 (in Bezug auf N) in diesen beiden Phasen.

Wie verhält sich N_0/N als Funktion der Temperatur: leiten Sie eine Formel her. Fertigen Sie eine Skizze von N'/N und N_0/N als Funktionen der Temperatur an.