Plenum - 19.4.

Lösung:

1. Volumen der D-Dimensionalen Kugel $V_D(R)$
   In 1D, 2D, 3D haben wir:

$$V_1(R) = 2R \tag{1}$$
$$V_2(R) = \pi R^2 \tag{2}$$
$$V_3(R) = \frac{4\pi}{3}R^3 \tag{3}$$

Zur Berechnung von

$$V_D(R) = \int_{\sum_{i=1}^D x_i^2 \leq R} dx_1...dx_D = R^D \int_{\sum_{i=1}^D y_i^2 \leq 1} dy_1...dy_D = R^D F_D \tag{4}$$

verwenden wir einen Trick. Es ist bekannt, dass gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-x^2} = \sqrt{\pi}. \tag{5}$$

Damit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 ... \int_{-\infty}^{\infty} dx_D\; e^{-(x_1^2+...+x_D^2)} = \pi^{D/2}. \tag{6}$$

Formel (6) lässt sich in D-dimensionale sphärische Koordinaten umschreiben:

$$\int_0^{\infty} dR\; D\; R^{D-1} e^{-R^2} F_D = \pi^{D/2}. \tag{7}$$

Das Integral in Formel (7) sieht dem Definitionsintegral der Γ-Funktion sehr ähnlich:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dx\; x^{z-1} e^{-x}. \tag{8}$$

Mit der Substitution $x = R^2$ erhalten wir

$$\int_0^{\infty} dR\; R^{D-1} e^{-R^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} dx\; x^{D/2-1} e^{-x} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right). \tag{9}$$

Daraus folgt

$$\frac{D}{2}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) F_D = \pi^{D/2} \rightarrow F_D = \frac{\pi^{D/2}}{\frac{D}{2}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \tag{10}$$

und damit

$$V_D(R) = \frac{\pi^{D/2}}{\frac{D}{2}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} R^D. \tag{11}$$

Bemerkung: der Faktor F_D ist äquivalent zu $V_D(1)$, also $F_D = V_D(1)$.

2. Die Zustandsumme im mikrokanonischen Ensemble ist gegeben durch:

$$\Omega(E,V,N) = C \int d^M q d^M q \; \delta(H(\underline{q},\underline{p}) - E). \tag{12}$$

Die Konstante C wird noch in der Vorlesung besprochen. Achtung: sie ist unter Umständen von der Teilchenzahl abhängig. Die Hamiltonfunktion für das ideale Gas lautet:

$$H(\underline{q},\underline{p}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{N} \frac{p_{ij}^2}{2m} = \frac{p_{11}^2}{2m} + ... + \frac{p_{3N}^2}{2m}. \tag{13}$$

Der erste Index steht für die Dimension, der zweite Index numeriert die Teilchen.

2.1. Berechnung mit Hilfe des Phasenraumvolumens $\Phi(E,V,N)$:

$$\Phi(E,V,N) = C \int_{\text{Volumen}} dx_{11}...dx_{3N} \int_{\frac{p_{11}^2}{2m}+-...+\frac{p_{3N}^2}{2m}\le E} dp_{11}...dp_{3N}. \tag{14}$$

Wir benützen die Formel (11) für das Volumen der D-dimensionalen Kugel. Das Integral über den Ort ergibt einfach das Volumen der Box zur N-ten Potentz, V^N. Das Integral im Impulsraum entspricht dem Volumen einer $3N$-dimensionalen Kugel. Mit der Substitution $\frac{p_{ij}}{\sqrt{2m}} = y_{ij}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\Phi(E,V,N) &= CV^N(2m)^{\frac{3N}{2}} \int_{y_{11}^2+...+y_{3N}^2\le E} dy_{11}...dy_{3N} \\ &= CV^N(2m)^{\frac{3N}{2}} \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\frac{3N}{2}\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)} E^{\frac{3N}{2}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Die Zustandssumme entspricht der Ableitung der Phasenraumdichte nach der Energie:

$$\Omega(E,V,N) = \frac{\partial \Phi(E,V,N)}{\partial E} = CV^N(2m)^{\frac{3N}{2}} \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)} E^{\frac{3N}{2}-1} \tag{16}$$

2.2. Direktes Berechnen mit Hilfe von Formel (1) aus der Angabe:

$$\begin{aligned}\Omega(E,V,N) &= C \int_{\text{Volumen}} dx_{11}...dx_{3N} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{11}... \int_{-\infty}^{\infty} dp_{3N}\; \delta\left(\frac{p_{11}^2}{2m} + -... + \frac{p_{3N}^2}{2m} - E\right) \\ &= CV^N \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)} \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\left(\frac{1}{2m}\right)^{\frac{3N}{2}}} E^{\frac{3N}{2}-1}\theta(E) \end{aligned} \tag{17}$$

Gleichung (17) ist tatsächlich ident zu Gleichung (16). Die Energie E haben wir im Punkt 2.1. von vornherein als positiv angenommen.