3. Tutorium - 26.4.

Bei allen folgenden Vielteilchensystemen wird angenommen, dass die Systeme ergodisch sind, dass aber die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen in der Hamilton-Funktion vernachlässigt werden können. Die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E, V, N)$ für das ideale Gas kann als bekannt angenommen werde, siehe Plenum am 19.4.

1. **Ein Teilchen im Schwerefeld**
   Ein Teilchen der Masse m fällt im Gravitationsfeld und springt verlustfrei vom Boden zurück. Die Hamilton-Funktion des Teilchens ist gegeben durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \begin{cases} mgz & \text{wenn } z > 0 \\ \infty & \text{wenn } z < 0 \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Zeichnen Sie im Γ-Raum eine Trajektorie mit konstanter Energie E. Um welche Funktion handelt es sich?
   (b) Berechnen Sie das Phasenraumvolumen $\Phi(E)$.
   (c) Berechnen Sie die Anzahl der Zustände $\Omega(E)$ auf der Energieschale.

2. **Impulsverteilungsfunktion des idealen Gases**
   Betrachten Sie ein ideales Gas in einer Box mit Volumen V. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion des Impulses des ersten Teilchens im mikrokanonischen Ensemble

$$w_1(\vec{b}) = \frac{C}{\Omega(E, V, N)} \int d^M q d^M p \; \delta(H(\underline{q}, \underline{p}) - E)\delta(\vec{p}_1 - \vec{b}). \tag{2}$$

   Hinweise:

$$\delta(\vec{p}_1 - \vec{b}) = \delta(p_{11} - b_1)\delta(p_{21} - b_2)\delta(p_{31} - b_3) \tag{3}$$

   Führen Sie in Gleichung 2 zuerst die Integration über $dp_{11}dp_{21}dp_{31}$ durch. Wie im Plenum, steht der erste Index für die Dimension, der zweite Index numeriert die Teilchen.

3. **N Teilchen im Schwerefeld**
   Betrachten Sie ein ideales Gas im Schwerefeld, das sich in einer Box mit Grundfläche F und Höhe H befindet. Die Teilchen haben die Masse m.
   (a) Schreiben Sie die Hamilton-Funktion auf.
   (b) Berechnen Sie die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E, F, N)$. Nehmen Sie für die Rechnung $H \to \infty$ an.
   Hinweise: Führen sie zuerst die Integration über die Ortskoordinaten durch. Danach führen Sie sphärische Koordinaten für den Impulsanteil ein und verwenden Sie die Formel für das Volumen der D-dimensionalen Kugel.
   Ergebnis:

$$\Omega(E, F, N) = C \frac{F^N}{(mg)^N} \frac{(2m\pi)^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{5N}{2})} E^{\frac{5N}{2}-1}.$$

4. **Harmonische Oszillatoren**
   Betrachten Sie ein ideales Gas, das in einem harmonischen Potential gefangen ist. Die Hamilton-Funktion lautet:

$$H = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{N} \frac{p_{ij}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x_{ij}^2 = \frac{p_{11}^2}{2m} + ... + \frac{p_{3N}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x_{11}^2 + ... + \frac{m\omega^2}{2} x_{3N}^2. \quad (4)$$

   Berechnen Sie mit Hilfe des Phasenraumvolumens die mikrokanonische Zustandssumme.

Ankreuzbar: 1,2,3,4

Nützliche Formeln:
Ist $c_1 > 0$, $c_2 > 0$,..., $c_M > 0$ und $0 \neq z \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^M} dx_1 ... dx_M \; \delta(c_1 x_1^2 + ... + c_M x_M^2 - z) = \frac{1}{\Gamma(\frac{M}{2})} \left(\frac{\pi^M}{c_1 ... c_M} \right)^{1/2} z^{\frac{M}{2}-1} \theta(z) \quad (5)$$

$$\int_0^\infty dx_1 ... \int_0^\infty dx_N \; \delta(x_1 + ... x_N - z) = \frac{1}{(N-1)!} z^{N-1} \theta(z) \quad (z \neq 0) \quad (6)$$

$$\int_0^1 dx \; x^{\nu-1} (1-x)^{\mu-1} = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)} \quad (7)$$

für $\nu, \mu > 0$.
Volumen der D-dimensionalen Kugel:

$$V_D(R) = \frac{\pi^{D/2}}{\frac{D}{2} \Gamma(\frac{D}{2})} R^D \quad (8)$$