Lösung zum 3. Tutorium am 26.4.

1. **Ein Teilchen im Schwerefeld**

(a) Es sind nur positive z erlaubt. Mit $E = \frac{p^2}{2m} + mgz$ bekommt man

$$z = \frac{1}{mg}\left(E - \frac{p^2}{2m}\right). \tag{1}$$

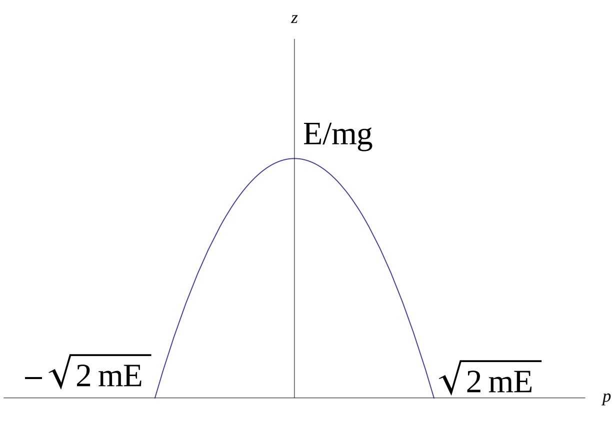
Es handelt sich um eine Parabel, siehe Abbildung.

(b)

$$\begin{aligned}
\Phi(E) &= \int_{\frac{p^2}{2m}+mgz\le E} dz dp \\
&= \int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} dp \int_0^{\frac{1}{mg}\left(E-\frac{p^2}{2m}\right)} dz \\
&= \int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} dp \frac{1}{mg}\left(E - \frac{p^2}{2m}\right) \\
&= \frac{2}{mg}\sqrt{2mE}E - \frac{1}{mg}\frac{p^3}{6m}\Big|_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \\
&= \frac{4}{3}\frac{1}{mg}\sqrt{2mE}E
\end{aligned} \tag{2}$$

(c)

$$\Omega(E) = \frac{d\Phi(E)}{dE} = \frac{2}{mg}\sqrt{2mE} \tag{3}$$



2. **Impulsverteilung des idealen Gases**
Die Impulsverteilung ist geben durch

$$w_1(\vec{b}) = \frac{C}{\Omega(E,V,N)} \int d^M q d^M p \; \delta(H(\underline{q},\underline{p}) - E)\delta(\vec{p_1} - \vec{b}). \tag{4}$$

Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass Teilchen 1 den Impuls $\vec{b}$ hat. Das Integral ergibt:

$$\begin{aligned}
& \int_{\text{Volumen}} dx_{11}...dx_{3N} \int_{\mathbb{R}^{3N}} dp_{11}...dp_{3N} \; \delta\left[H(p_{11},...,p_{3N}) - E\right] \delta(\vec{p_1} - \vec{b}) \\
& = V^N \int_{\mathbb{R}^{3N}} dp_{11}...dp_{3N} \; \delta\left(\frac{p_{11}^2}{2m} + ...\frac{p_{3N}^2}{2m} - E\right) \delta(p_{11} - b_1)\delta(p_{21} - b_2)\delta(p_{31} - b_3) \\
& = V^N \int_{\mathbb{R}^{3N-1}} dp_{12}...dp_{3N} \; \delta\left[\frac{p_{21}^2}{2m} + ... + \frac{p_{3N}^2}{2m} - \left(E - \frac{b_1^2}{2m} - \frac{b_2^2}{2m} - \frac{b_3^2}{2m}\right)\right] \\
\overset{\text{Angabe Formel (5)}}{\rightarrow} & = V^N \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3(N-1)}{2}\right)} (2m\pi)^{\frac{3(N-1)}{2}} \left(E - \frac{b_1^2}{2m} - \frac{b_2^2}{2m} - \frac{b_3^2}{2m}\right)^{\frac{3(N-1)}{2} - 1} \\
& \times \theta\left(E - \frac{b_1^2}{2m} - \frac{b_2^2}{2m} - \frac{b_3^2}{2m}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

In den letzten zwei Zeilen wurde Formel (5) aus der Angabe verwendet. Mit $\Omega(E,V,N)$ für das ideale Gas aus dem Plenum vom 19.4. ergibt sich die Impulsverteilung zu

$$\begin{aligned}
w_1(\vec{b}) = & \frac{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3(N-1)}{2}\right)} \frac{1}{(2m\pi)^{3/2} E^{3N/2-1}} \left(E - \frac{b_1^2}{2m} - \frac{b_2^2}{2m} - \frac{b_3^2}{2m}\right)^{\frac{3N-5}{2}} \\
& \times \theta\left(E - \frac{b_1^2}{2m} - \frac{b_2^2}{2m} - \frac{b_3^2}{2m}\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

3. **N Teilchen im Schwerefeld**

   (a) Die Hamiltonfunktion ist geben durch

$$H = \frac{p_{11}^2}{2m} + ... + \frac{p_{3N}^2}{2m} + mgx_{31} + ... + mgx_{3N}, \tag{7}$$

   wobei die Ortsvariablen innerhalb des Volumens der Box sein müssen. Außerhalb ist das Potential unendlich. Für die Integration nehmen wir an, dass die Höhe H der Box ins Unendliche geht.

(b)

$$\Omega(E,F,N) = C\int_{\text{Flaeche}} dx_{11}...dx_{2N}\int_{\mathbb{R}_+^N} dx_{31}...dx_{3N}\int_{\mathbb{R}^N} dp_{11}...dp_{3N}$$
$$\delta\left(\frac{p_{11}^2}{2m}+...+\frac{p_{3N}^2}{2m}+mgx_{31}+...mgx_{3N}-E\right)$$
$$\overset{\text{Angabe Formel (6)}}{\rightarrow} = CF^N\frac{1}{(mg)^N}\int_{\mathbb{R}^{3N}} dp_{11}...dp_{3N}\frac{1}{(N-1)!}\left(E-\frac{p_{11}^2}{2m}-...-\frac{p_{3N}^2}{2m}\right)^{N-1}$$
$$\theta\left(E-\frac{p_{11}^2}{2m}-...-\frac{p_{3N}^2}{2m}\right)$$
$$= CF^N\frac{1}{(mg)^N}\int_{\frac{p_{11}^2}{2m}+...+\frac{p_{3N}^2}{2m}\leq E} dp_{11}...dp_{3N}\frac{1}{(N-1)!}$$
$$\times\left(E-\frac{p_{11}^2}{2m}-...-\frac{p_{3N}^2}{2m}\right)^{N-1}. \tag{8}$$

Wir substituieren $\frac{p_{ij}}{\sqrt{2m}} = y_{ij}$ und bekommen:

$$\Omega(E,F,N) = CF^N\frac{1}{(mg)^N}\frac{(2m)^{3N/2}}{(N-1)!}\int_{y_{11}^2+...+y_{3N}^2\leq E} dy_{11}...dy_{3N}\left(E-y_{11}^2-...-y_{3N}^2\right)^{N-1}. \tag{9}$$

Wir führen jetzt Kugelkoordinaten ein.
Einschub: Kugelkoordinaten
Die Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^M$ sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}
x_1 &= R\cos\theta_1\\
x_2 &= R\cos\theta_2\sin\theta_1\\
... &= ...\\
x_{M-1} &= R\cos\theta_{M-1}\sin\theta_{M-2}...\sin\theta_2\sin\theta_1\\
x_M &= R\sin\theta_{M-1}\sin\theta_{M-2}...\sin\theta_2\sin\theta_1.
\end{aligned} \tag{10}$$

Das Volumselement ist

$$dx_1...dx_M = R^{M-1}dR\sin^{M-2}\theta_1 d\theta_1\sin^{M-3}\theta_2 d\theta_2...\sin\theta_{M-2}d\theta_{M-2}d\theta_{M-1}. \tag{11}$$

Hat man nun ein Integral der folgenden Form zu lösen

$$\int_{x_1^2+...+x_M^2\leq R^2} dx_1...dx_M f(R) = ? \tag{12}$$

geht man wie folgt vor:

$$\int_{x_1^2+...+x_M^2\leq E} dx_1...dx_M\ f(R) = \underbrace{\int d\Omega_M}_{\text{Oberflaeche der Kugel mit Radius 1}}\int_0^{\sqrt{E}} dR\ R^{M-1}f(R). \tag{13}$$

Bei gegebenem Volumen der M-dimesionalen Kugel

$$V_M(R) = \frac{\pi^{\frac{M}{2}} R^M}{\frac{M}{2}\Gamma(\frac{M}{2})} \tag{14}$$

ist die Oberfläche der Kugel gegeben durch:

$$\underbrace{\int d\Omega_M}_{\text{Oberflaeche der Kugel mit Radius 1}} = \frac{dV_M(R)}{dR}\bigg|_{R=1} = 2\frac{\pi^{\frac{M}{2}}}{\Gamma(\frac{M}{2})} = MV_M(1). \tag{15}$$

Eingesetzt in Gleichung 13 ergibt:

$$\int_{x_1^2+...+x_M^2\leq E} dx_1...dx_M\ f(R) = V_M(1)M\int_0^{\sqrt{E}} dR\ R^{M-1}f(R). \tag{16}$$

Wir verwenden Gleichung 16 und setzen in Gleichung 9 ein.

$$\begin{aligned}\Omega(E,F,N) &= CF^N\frac{1}{(mg)^N}\frac{(2m)^{3N/2}}{(N-1)!}\int_{y_{11}^2+...+y_{3N}^2\leq E} dy_{11}...dy_{3N}\left(E-y_{11}^2-...-y_{3N}^2\right)^{N-1}\\ &= CF^N\frac{1}{(mg)^N}\frac{(2m)^{3N/2}}{(N-1)!}V_{3N}(1)3N\int_0^{\sqrt{E}} dR\ R^{3N-1}(E-R^2)^{N-1}.\end{aligned} \tag{17}$$

Wir heben E aus des Klammer des Integranden heraus und verwenden eine weitere Substitution $R^2/E = x$:

$$\begin{aligned}\Omega(E,F,N) &= CF^N\frac{1}{(mg)^N}\frac{(2m)^{3N/2}}{(N-1)!}V_{3N}(1)3NE^{\frac{5N}{2}-1}\frac{1}{2}\int_0^1 dx\ x^{\frac{3N}{2}-1}(1-x)^{N-1}\\ \overset{\text{Formel (7) aus der Angabe}}{\rightarrow} &= C\frac{F^N}{(mg)^N}\frac{(2m)^{\frac{3N}{2}}}{(N-1)!}\frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\frac{3N}{2}\Gamma(\frac{3N}{2})}\frac{3N}{2}\frac{\Gamma(\frac{3N}{2})\Gamma(N)}{\Gamma(\frac{5N}{2})}E^{\frac{5N}{2}-1}\\ &= C\frac{F^N}{(mg)^N}\frac{(2m\pi)^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{5N}{2})}E^{\frac{5N}{2}-1}.\end{aligned} \tag{18}$$

4. **Harmonische Oszillatoren**
   Das Phasenraumvolumen ist geben durch

$$\begin{aligned}\Phi &= C\int_{\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^N \frac{p_{ij}^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}x_{ij}^2\leq E} dx_{11}...dx_{3N}dp_{11}...dp_{3N}\\ &= C(2m)^{\frac{3N}{2}}\left(\frac{2}{m\omega^2}\right)^{\frac{3N}{2}}\int_{\sum_{i=1}^{6N} y_i^2\leq E} dy_1...dy_{6N}\\ &= C\left(\frac{2}{\omega}\right)^{3N}\frac{\pi^{\frac{6N}{2}}}{\frac{6N}{2}\Gamma(\frac{6N}{2})}E^{\frac{6N}{2}}\\ &= C\left(\frac{2}{\omega}\right)^{3N}\frac{\pi^{3N}}{3N\Gamma(3N)}E^{3N}.\end{aligned} \tag{19}$$

Die mikrokanonische Zustandssumme ergibt sich zu

$$\Omega = \frac{\partial\Phi}{\partial E} = C\left(\frac{2}{\omega}\right)^{3N}\frac{\pi^{3N}}{\Gamma(3N)}E^{3N-1}. \tag{20}$$