6. Tutorium - 14.6.

1. **System mit diskreten Energien**
   Betrachten Sie ein klassisches System von **unterscheidbaren** nichtwechselwirkenden Teilchen die ausschließlich die zwei diskreten Energien E_1 und E_2 ($E_1 \neq E_2$) annehmen können.
   (a) Berechnen Sie die mikrokanonischen Zustandssumme für gegebenes E und N. Beachten Sie, dass $E = N_1 E_1 + N_2 E_2$ und $N = N_1 + N_2$ wobei N_i die Zahl der Teilchen mit Energie E_i ist.
   (b) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme für gebenes N.
   (c) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme. Nehmen Sie dafür an, dass $(e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}) < 1$ und $\mu < 0$ ist.

2. **Großkanonisches Ensemble I**
   Betrachten Sie ein Gas ununterscheidbarer klassischer Teilchen in Kontakt mit einem Wärmebad. Es findet sowohl ein Energie- als auch ein Teilchenaustausch statt.
   (a) Schreiben Sie die Phasenraumdichte im großkanonischen Ensemble allgemein auf. Was gibt diese Größe an?
   (b) Geben Sie eine Formel an, wie man aus der Phasenraumdichte die Wahrscheinlichkeit $P(N)$ berechnen kann, dass das System N Teilchen hat.
   (c) Betrachten Sie nun konkret ein nichtwechselwirkendes Gas in einem harmonischen Potential. Die Hamiltonfunktion für ein Teilchen ist geben durch:
   $$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2. \tag{1}$$
   Berechnen Sie die mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle$ und die Wahrscheinlichkeit $P(N)$. Drücken Sie dabei $P(N)$ als Funktion von $\langle N \rangle$ aus. Um welche Verteilung handelt es sich?

   Bemerkung: Das Ergebnis aus (c) gilt allgemein für nichtwechselwirkende Systeme.

3. **Großkanonisches Ensemble II**
   Betrachten Sie das ultra-relativistische Gas aus Bsp. 1 5. Tutorium. Berechnen Sie für dieses System die großkanonische Zustandssumme. Hinweis: Verwenden Sie dafür die bereits berechnete kanonische Zustandssumme. Berechen Sie weiters die kalorische und thermische Zustandsgleichung.

4. **Dichtematrix**
   Gegeben sei ein Spin-1/2-Teilchen, dessen Zustand durch die folgende Dichtematrix
   $$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & a - 1/2 \\ a - 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{2}$$
   in der Basis $\{|-1/2\rangle, |1/2\rangle\}$ beschrieben ist. Die Quantisierungsachse ist die z-Achse.
   (a) Handelt es sich um einen reinen oder gemischten Zustand?
   (b) Diagonalisieren sie ρ und bestimmen Sie die Eigenvektoren. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis: welcher Spin-operator S_i mit $i = x, y, z$ ist gleichzeitig diagonalisierbar mit ρ?
   (c) Berechnen Sie die Entropie S mit Hilfe der Formel $S = -k_B Tr(\rho \ln \rho)$. Für welches a wird die Entropie maximal?

Ankreuzbar: 1,2,3,4