# 7. Tutorium - 21.6.

1. **Bosonen und Fermionen im kanonischen Ensemble**
Die Zustandssumme im kanonischen Ensemble für ein quantenmechanisches System ist geben durch

$$Z = Tr\left(e^{-\beta \hat{H}}\right). \tag{1}$$

Betrachten Sie ein System bestehend aus 2 nicht wechselwirkenden Teilchen die jeweils die Einteilchenenergien $0, E, 2E$ annehmen können. Das System ist an ein Wärmebad gekoppelt. Berechnen Sie $Z$ und die mittlere Energie für (a) Fermionen und (b) Bosonen. (Vernachlässigen Sie dabei den Spin der Teilchen aber nicht ihre quantenstatistische Eigenschaft.)

2. **Zustandsdichte: Zahl der Einteilchenzustände**
Ein quantenmechanisches Teilchen befindet sich in einem drei-dimensionalen harmonischen Oszillatorpotential. Die Einteilchenenergien sind

$$\epsilon_{n_1,n_2,n_3} = \hbar\omega\left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right) \tag{2}$$

   (a) Berechnen Sie die Zahl der Zustände mit fester Energie $\epsilon$. Hinweis: Die Gauß'sche Summenformel $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ist hilfreich.
   (b) Berechnen Sie die Zahl der Zustände nun näherungsweise, indem Sie das Einteilchephasenraumvolumen dividiert durch die Zahl der quantenmechanischen Einheitszellen $h^3$ nach der Energie ableiten, also $D(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon}\left[\frac{1}{h^3}\int d^3q d^3p\, \theta(\epsilon - H)\right]$. Wann stimmt (a) mit (b) überein?

3. **Ideales Fermigas bei $T = 0$**
Betrachten Sie $N$ ideale Fermiteilchen (Spin 1/2) bei $T = 0$ in einer Box mit Volumen $L^d$.
   (a) Wie sieht die Fermi-Dirac Verteilungsfunktion bei $T = 0$ aus. Berechnen Sie die Einteilchenzustandsdichte $D(\epsilon)$ in $d$ Dimensionen.
   (b) Berechnen Sie die Fermienergie als Funktion der Dichte $\langle n\rangle = N/L^d$. Integrieren Sie dazu $D(\epsilon)$ bis $\epsilon_F$ und setzen Sie diesen Ausdruck gleich $N$.
   (c) Berechnen Sie die mittlere Energie $\langle E\rangle$.
   (d) Berechen Sie mit Hilfe von $\langle E\rangle$ den Druck $p$ bei $T = 0$. Benützen Sie $pV = \frac{2}{d}\langle E\rangle$. Woher kommt dieser Ausdruck? Wie groß wäre $p$ für ein ideales Bosegas?

4. **Ideales Fermigas bei $T \neq 0$**
Leitungselektronen von Metallen können in erster Näherung als ein ideales Gas beschrieben werden. Zeigen Sie, dass damit gilt $C_V \propto T$. Gehen Sie nach der folgenden Anleitung vor.
   (a) Die Teilchendichte der Leitungselektronen ist typischerweise $\approx 10^{23}/\text{cm}^3$. Schätzen Sie damit wie groß $\epsilon_F$ gegenüber $k_B T$ mit $T = 300K$ ist. Skizzieren Sie die Fermi-Dirac Verteilungsfunktion bei Raumtemperatur.
   (b) Entwickeln Sie die Fermi-Dirac Verteilungsfunktion um $\epsilon - \epsilon_F = 0$ bis zum linearen Term. Setzen Sie dafür $\mu = \epsilon_F$. Die so erhaltene Verteilung $n_{lin}(\epsilon)$ soll ebenfalls auf das Intervall $n_{lin}(\epsilon) \in [0, 1]$ beschränkt werden. Schätzen Sie damit ab, wie viele Elektronen mehr Energie als $\epsilon_F$ haben.

(c) Nehmen sie nun an, dass die Elektronen die Energie $\epsilon_F + ak_BT$ haben ($a$ ist eine temperaturunabhänigige Konstante). Was ergibt sich für $C_V$?

---

Ankreuzbar: 1,2,3,4