Gerhard Kahl & Florian Libisch

STATISTISCHE PHYSIK I (VU – 136.020)

2. Test am 13.6.2014

NAME: **MN:**

Bitte beginnen Sie jedes Beispiel auf einem neuen Blatt!
Erklären Sie alle Rechenschritte so, dass Sie beim Verbessern nachvollziehbar sind!
Die physikalische Bedeutung aller verwendeter Symbole muß erläutert werden!

T1. (20 Punkte)
Betrachten Sie ein ultrarelativistisches Bose-Gas in **zwei** Dimensionen im Rahmen der Quantenstatistik. Die Dispersionsrelation ist gegeben durch $\varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar c\,|\mathbf{k}|$.

(a) Berechnen Sie das große Potential J, und daraus die Teilchendichte n als Funktion von T, V und der Fugazität z.

(b) Begründen Sie, warum es in diesem Fall zur Bose-Einstein Kondensation kommen kann und berechnen Sie die Temperatur T_c bei der Kondensation einsetzt für gegebene Teilchendichte.

(c) Zeigen Sie, dass Sie für den Druck des Gases im Limes sehr hoher Temperaturen das klassische Resultat $pV = \langle N\rangle_\mathrm{g} k_\mathrm{B}T$ erhalten. Bestimmen Sie im Limes hoher Temperaturen die Quantenkorrektur erster Ordnung zur klassischen Gleichung $pV = \langle N\rangle_\mathrm{g}\, k_\mathrm{B}T$.

Hinweis: folgende Ausdrücke sind hilfreich:

$$g_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x - 1}dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^\nu}, \qquad \frac{d}{dz}g_\nu(z) = \frac{1}{z}g_{\nu-1}(z), \qquad g_2(1) = \frac{\pi}{6}$$

T2. (20 Punkte)
Gegeben ist ein System, das sich in einem Volumen V befindet und das mit einem Temperatur- und Teilchenbad in Kontakt steht. Leiten Sie den Formalismus des großkanonischen Ensembles her, indem Sie das Gesamtsystem (also "System" [Index 1] sowie "Teilchen- und Temperaturbad" [Index 2]) im mikrokanonischen Ensemble betrachten. Geben Sie alle relevanten thermodynamischen und mikroskopischen Größen an, die das Gesamtsystem beschreiben und erklären Sie diese.

(a) Leiten Sie bei vorgegebener Temperatur (T_2) und chemischem Potential (μ_2) des Temperatur- und Teilchenbades den expliziten Ausdruck für die großkanonische Verteilungsfunktion, $\rho_\mathrm{g}(\mathbf{p}_1^{N_1}, \mathbf{q}_1^{N_1})$ her. Was gibt die Größe $\rho_\mathrm{g}(\mathbf{p}_1^{N_1}, \mathbf{q}_1^{N_1})d\mathbf{p}_1^{N_1}d\mathbf{q}_1^{N_1}$ an?

(b) Geben Sie die explizite Form der großkanonischen Zustandssumme, Z_g, an. Wie werden Mittelwerte von Observablen im großkanonischen Ensemble gebildet?

(c) Leiten Sie eine Formel her, wie die mittlere Teilchenzahl $\langle N\rangle_\mathrm{g}$ direkt durch geeignete Ableitungen der großkanonischen Zustandssumme berechnet werden kann.

(d) Nehmen Sie an, dass das Volumen des Systems nicht mehr fest vorgegeben ist, sondern durch ein Druckreservoir gesteuert wird. Könnte für dieses Ensemble ("großes kanonisch-harmonisches Ensemble") ein ähnlicher Formalismus wie für das großkanonische Ensemble hergeleitet werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

T3. (15 Punkte)

Photonen in einem evakuierten Volumen V $(= L^3)$, das auf eine einheitliche Temperatur T erhitzt wurde, lassen sich im Rahmen der Quantenstatistik durch einen Hamilton-Operator $\hat{H}$ der Form

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\pi} \hat{H}_{\mathbf{k},\pi}, \qquad E_{\mathbf{k},\pi} = \left(n_{\mathbf{k},\pi} + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_{\mathbf{k},\pi}$$

beschreiben. Jeder der Einteilchen-Operatoren $\hat{H}_{\mathbf{k},\pi}$ und die entsprechenden Einteilchenenergien $E_{\mathbf{k},\pi}$ sind durch den Wellenvektor $\mathbf{k} = 2\pi/L \cdot (n_x, n_y, n_z)$ (bei Annahme periodischer Randbedingungen und mit $n_\alpha \in \mathbb{Z}$) und die beiden Polarisationszustände $\pi = \pm 1$ charakterisiert. Weiters gilt $w_{\mathbf{k},\pi} = ck$, und $n_{\mathbf{k},\pi} = 0, 1, 2, \ldots$. Es handelt sich also um ein System von nicht-wechselwirkenden (Quasi-)Teilchen.

(a) Berechnen Sie, ausgehend von der Zustandssumme Z' (μ wird mit null angenommen)

$$Z' = \sum_{\{n_\mathbf{k}\}} \exp\left[-\beta \sum_{\mathbf{k},\pi} E_{\mathbf{k},\pi}\right],$$

die mittlere Energie, $\langle E \rangle_g$ (wobei der divergierende Term für die Nullpunktsenergie ohne Begründung weggelassen werden darf).

(b) Leiten Sie aus dem Ausdruck für $\langle E \rangle_g$ und unter Verwendung des Kontinuumsgrenzwertes das Stefan-Boltzmann Gesetz her.

Hinweis: verwenden Sie folgenden Ausdruck: $g_4(1) = \frac{\pi^4}{15}$

T4. (20 Punkte)

Ein abgeschlossenes System von N ununterscheidbaren, klassischen Teilchen in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T (kanonisches Ensemble) wird durch eine allgemeine Hamilton-Funktion der Form

$$\mathcal{H}(\{\xi_{j,i}\}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{f} \xi_{j,i}^2 \alpha_j^2$$

beschrieben; für einen fixen Teilchenindex i (mit $i = 1, \ldots, N$) bezeichnen dabei die $\xi_{j,i}$ die f (Anzahl der Freiheitsgrade; $j = 1, \ldots, f$) verallgemeinerten Orts- oder Impulskoordinaten mit Koeffizienten α_j.

(a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme des Systems.

(b) Zeigen Sie, dass im kanonischen Ensemble die mittlere Energie des Systems gegeben ist durch: $\langle E \rangle_\mathrm{k} = \frac{f}{2} N k_\mathrm{B} T$ (Gleichverteilungssatz).

(c) Das System sei nunmehr in Kontakt mit einem Teilchenreservoir mit chemischem Potential μ. Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme dieses Systems.

(d) Beweisen Sie, dass der Gleichverteilungssatz für den Mittelwert $\langle E \rangle_\mathrm{g}$ auch im großkanonischen Ensemble gilt.

Hinweis: folgendes Integral ist hilfreich: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$