

F. Formelsammlung

1. Gamma Funktion $\Gamma(x)$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt t^{x-1} e^{-t} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x \neq 0, -1, -2, \dots$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(1) = 1$$

2. Formel von Stirling

sei $x \rightarrow \infty$ und $y = \text{const.}$, dann gilt

$$\Gamma(x+y) \rightarrow \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x-(1/2)+y}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \rightarrow \sqrt{2\pi} e^{-n} n^n n^{1/2} \quad n \in \mathbb{N}$$

3. Volumen und Oberfläche einer D -dimensionalen Kugel

sei R_0 der Radius einer Kugel im \mathbb{R}^D , dann ist ihr Volumen, $V(R_0)$, gegeben durch

$$V(R_0) = \int_0^{R_0} r^{D-1} dr \cdot \int_{\Omega_D} d\Omega_D = \frac{R_0^D}{D} \cdot \Omega_D = \frac{R_0^D}{D} \cdot \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}$$

wobei Ω_D die Oberfläche dieser Kugel ist

4. Integrale über Gauß-Funktionen

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} a^{-m/2} \quad m \text{ gerade}$$

5. Verallgemeinerte ζ -Funktionen

$$g_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1} - 1} \quad z \in \mathbb{C}, \nu \in \mathbb{R}$$

$$f_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1} + 1} \quad z \in \mathbb{C}, \nu \in \mathbb{R}$$

es gilt

$$\frac{d}{dz} g_\nu(z) = \frac{1}{z} g_{\nu-1}(z)$$

Reihendarstellungen (für kleine z)

$$g_\nu(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^\nu}$$

$$f_\nu(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k^\nu}$$