5. Tutorium - Statistische Physik I - 9.05.2014

15. Betrachten Sie einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator, der durch einen Dichteoperator der Form
$$\rho = c \sum \frac{1}{n!} |n\rangle \langle n|$$
(mit Normierungskonstante c) beschrieben wird.

    (a) Handelt es sich um einen reinen oder einen gemischten Zustand?

    (b) Bestimmen Sie die Normierungskonstante c.

    (c) Berechnen Sie die Energie des Systems.

    (d) Berechnen Sie den Erwartungswert des Ortes $\langle X \rangle$ und seine Schwankung. Verwenden Sie dabei die Erzeuger- und Vernichter-Algebra ($X = \alpha(a + a^\dagger)$).

16. Betrachten Sie eine Oberfläche, auf der sich Adsorbate ansammeln können. Nähern Sie jedes Adsorbatmolekül als klassischen dreidimensionalen harmonischen Oszillator (Frequenz ω). Die Oberfläche hat die Temperatur T und ist in Kontakt mit einem Gas aus Adsorbaten, das als Teilchenreservoir fungiert (chemisches Potential μ).

    (a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme des Systems.

    (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(N)$, dass sich genau N Teilchen auf der Oberfläche befinden,
    $$P(N) = \frac{1}{h^{3N} N!} \int d\mathbf{p}^N d\mathbf{q}^N \rho_g(p^N, q^N),$$
    mit der großkanonischen Verteilungsfunktion ρ_g.

    (c) Zeigen Sie dass $P(N)$ normiert ist.

    (d) Berechnen Sie die mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle$, und stellen Sie $P(N)$ als Funktion von $\langle N \rangle$ dar. Zeigen Sie, dass es sich um eine Poisson-Verteilung handelt.

    (e) Berechnen Sie $\langle E \rangle$ und die Wärmekapazität des Systems.

17. Betrachten Sie ein ideales Gas von N ununterscheidbaren, nicht wechselwirkenden, zweiatomigen Molekülen, die sich in einem Behälter mit Volumen V befinden. Die Hamiltonfunktion eines Moleküles sei gegeben durch
$$\mathcal{H}_{\text{mol}}(\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B, \mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B) = \frac{\mathbf{p}_A^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_B^2}{2m} + D\,|q_A - q_B|^2\,,$$

wobei $D > 0$, und die Indizes A und B sich auf die zwei unterschiedlichen Atome in einem Molekül beziehen. Die Hamilton-Funktion des Gesamtsystems ist

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}_{1A}^{N}, \mathbf{p}_{aB}^{N}, \mathbf{q}_{1A}^{N}, \mathbf{q}_{aB}^{N}) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{H}_{\mathrm{mol}}(\mathbf{p}_{iA}, \mathbf{p}_{iB}, \mathbf{q}_{iA}, \mathbf{q}_{iB})$$

Das Gas befinde sich in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T (kanonisches Ensemble).

(a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme

(b) Berechnen Sie die freie Energie sowie die Wärmekapazität des Systems;

(c) Interpretieren Sie ihr Ergebnis in Hinblick auf den Gleichverteilungssatz;

(d) Berechnen Sie den mittleren quadratischen Abstand der Atome eines Moleküls ($\langle |\mathbf{q}_{iA} - \mathbf{q}_{iB}|^2 \rangle$) als Funktion der Temperatur.

Hinweis: Verwenden Sie Schwerpunkts- und Abstandsvektoren innerhalb der Moleküle.

Zu kreuzen: 15abc,15d,16ab,16cd,16e,17ab,17cd