6. Tutorium - Statistische Physik I - 16.05.2014

18. Betrachten Sie ein quantenmechanisches drei-niveau System. Zwei Dichteoperatoren der Form

$$\rho_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

beschreiben zwei mögliche Zustände des Systems.

(a) Handelt es sich jeweils um einen reinen oder einen gemischten Zustand?

(b) Ein Operator A sei gegeben als

$$A\,|\phi_1\rangle = |\phi_3\rangle\,, \quad A\,|\phi_2\rangle = |\phi_2\rangle\,, \quad A\,|\phi_3\rangle = |\phi_1\rangle$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von A in den durch ρ_1 und ρ_2 beschriebenen Zuständen, und dessen Schwankung ΔA.

19. Betrachten Sie eine Box der Breite W (ein-dimensionales Problem).

(a) Berechnen Sie für das klassische Problem eines Teilchens in der Box die kanonische Zustandssumme.

(b) Rechnen Sie nun quantenmechanisch mit den Einteilchenzuständen $|\phi_i\rangle$

$$\mathcal{H}\,|\phi_i\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 |\phi_i\rangle = \varepsilon_i\,|\phi_i\rangle$$

Schreiben Sie die Dichtematrix für ein Teilchen in der Box an, das sich in jedem Eigenzustand des Hamiltonians mit einer Wahrscheinlichkeit $p_i = \exp(-\beta\varepsilon_i)$ befindet. Schreiben Sie den Normierungsfaktor nur formal an. Im Limes hoher Temperaturen können Sie die Summation über n durch ein Integral nähern. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Näherung den Erwartungswert der Energie des Teilchens, und vergleichen Sie mit dem klassischen Resultat.

(c) Zeigen Sie, dass sich im Vergleich des klassischen mit dem quantenmechanischen Problem genau der Gewichtungsfaktor $1/h$ für die Integration über den klassischen Phasenraum ergibt.

20. Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator, in dem sich drei Teilchen befinden.

    (a) Geben Sie für drei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen (Fermionen) die ersten drei niedrigsten Energieniveaus und ihre Entartung an.

    (b) Geben Sie für drei Spin-0 Teilchen (Bosonen) die ersten drei niedrigsten Energieniveaus und ihre jeweilige Entartung an.

21. Betrachten Sie ein klassisches ideales Gas in einem Behälter mit Volumen V.

    (a) Der Behälter wird in Kontakt mit einem Wärmebad gebracht. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme, und daraus das chemische Potential über seine Definition

    $$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T}$$

    mit der freien Energie F. Wie verhält sich μ als Funktion von T? (Hinweis: Stirling-Formel)

    (b) Der Behälter werde nun auch noch in Kontakt mit einem Teilchenreservoir (chemisches Potential μ) gebraucht. Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme, und daraus den Erwartungswert für die Teilchenzahl $\langle N \rangle$.

    (c) Zeigen Sie, dass im Limes großer Teilchenzahlen die kanonische und großkanonische Beziehung zwischen μ und N kompatibel sind.

Zu kreuzen: 18,19ab,19c,20a,20b,21a,21bc