7. Tutorium - Statistische Physik I - 23.05.2014

22. Betrachten Sie ein Ensemble aus $3N$ unabhängigen, räumlich getrennten, linearen, quantenmechanischen harmonischen Oszillatoren gleicher Frequenz ω.

    (a) Berechnen Sie die (quantenmechanische) kanonische Zustandssumme.

    (b) Berechnen Sie die Energie des Systems. Zeigen Sie, dass Sie im Limes hoher Temperaturen das klassische Resultat, und im Limes $T \to 0$ die Grundzustandsenergie $N\hbar\omega/2$ erhalten.

    (c) Berechnen Sie die Wärmekapazität C_V des Systems. Zeigen Sie, dass sich im Hochtemperaturlimes das klassische Verhalten ergibt. Was ergibt sich im Tieftemperaturlimes? Skizzieren Sie den Verlauf der Wärmekapazität als Funktion der Temperatur. Diskutieren Sie den Zusammenhang mit dem Gesetz von Dulong-Petit $C_V = 3Nk$.

23. Betrachten Sie ein Teilchen in einer eindimensionalen Box im Rahmen der Quantenmechanik. Die Einteilchenzuständen $|\phi_n\rangle$ sind

$$H^1 |\phi_n\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 |\phi_n\rangle = \varepsilon_n |\phi_n\rangle$$

    (a) Schreiben Sie die kanonische Zustandssumme in einer Darstellung der Form

$$Z_K = \int D(E) e^{-\beta E} \mathrm{d}(E),$$

    wobei Sie die auftretende Summe über n wieder durch ein Integral nähern. Die Größe $D(E)$ bezeichnet man als Zustandsdichte.

    (b) Berechnen Sie $D(E)$ auch für zwei und drei Dimensionen.

24. Betrachten Sie nichtwechselwirkende Teilchen in einem eindimensionalen Potential mit gegebenen Einteilchenenergien

$$\hat{H} |\phi_n\rangle = \varepsilon_n |\phi_n\rangle , \quad n \in \mathbb{N}$$

    Verwenden Sie im Folgenden Fock-Raum Zustände und die zweite Quantisierung: anstatt die verschiedenen Einteilchen-Wellenfunktionen anzuschreiben, verwendet man einen Ket von Besetzungszahlen $|n_1\, n_2\, n_3\, \ldots\rangle$, wobei n_i die Besetzungszahl des Energieniveaus $|\phi_i\rangle$ bezeichnet.

    (a) Schreiben Sie den Teilchenzahloperator $\hat{N}$ und den Hamiltonoperator $\hat{H}$ mittels Erzeugern $a_j^\dagger$ und Vernichtern a_j von Teilchen im i-ten Energieniveau formal an,

$$a_j |n_1 \ldots n_j \ldots\rangle = \sqrt{n_j}\, |n_1 \ldots n_j - 1 \ldots\rangle$$
$$a_j^\dagger |n_1 \ldots n_j \ldots\rangle = \sqrt{n_j + 1}\, |n_1 \ldots n_j + 1 \ldots\rangle .$$

(b) Argumentieren Sie, dass $\hat{N}$ und $\hat{H}$ vertauschen.

(c) Schreiben Sie die (quantenmechanische) kanonische Zustandssumme für N Teilchen formal an. Faktorisiert die Zustandssumme?

(d) Schreiben Sie die (quantenmechanische) großkanonische Zustandssumme für gegebenes chemisches Potential μ formal an. Faktorisiert die Summe?

(e) Welche Besetzungszahlen n_i sind für Bosonen erlaubt? Was ergibt sich damit für die großkanonische Zustandssumme?

(f) Welche Besetzungszahlen n_i sind für Fermionen erlaubt? Was ergibt sich damit für die großkanonische Zustandssumme?

Zu kreuzen: 22a,22b,22c,23a,23b,24ab,24cd