Statistische Physik I, SS 2015: Test 2 (26.06.2015)

Name:

Matrikelnummer:

---

1. Dichteoperatoren (15P)

(a) Geben sei ein 3-Niveau System mit Basiszuständen $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ und 4 Operatoren mit Matrixdarstellung

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \hat{\rho}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; \hat{\rho}_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \hat{\rho}_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ -2i & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

wobei $(\hat{\rho})_{ij} = \langle i|\hat{\rho}|j\rangle$. Welche dieser Operatoren stellen einen gültigen Dichteoperator dar? Welche davon wiederum sind reine Zustände? Begründen Sie Ihre Antwort. (3P)

(b) Schreiben Sie $\hat{\rho}_2$ in Diagonalform $\hat{\rho}_2 = \sum_{n=1}^{3} p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ und bestimmen Sie p_n und $|\psi_n\rangle$. (5P)

(c) Berechnen Sie $\mathrm{Sp}\{\sqrt{\hat{\rho}_2}\}$. (2P)

(d) Gegeben sei ein System aus zwei harmonischen Oszillatoren mit jeweiligen Basiszuständen $|n\rangle_A$ and $|n\rangle_B$. Der Dichteoperator des Gesamtsystems sei

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \qquad |\Psi\rangle = \sqrt{1-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{\frac{n}{2}} \, |n\rangle_A \otimes |n\rangle_B. \tag{1}$$

Berechnen Sie den reduzierten Dichteoperator $\hat{\rho}_A$ des Subsystems A, sowie die Entropie von $\hat{\rho}$ und von $\hat{\rho}_A$. (5P)

2. Relativistisches klassisches Gas in 2D (15P)

Betrachten Sie ein klassisches Gas aus nichtwechselwirkenden Teilchen, deren Bewegung auf eine zweidimensionale Fläche $A = L^2$ in der x-y Ebene eingeschränkt ist. Die Bewegung der Teilchen ist relativistisch und wird durch die Hamiltonfunktion

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_i c|\vec{p}_i|, \tag{2}$$

beschrieben, wobei $\vec{p}_i = (p_{i,x}, p_{i,y})$ den Impuls des i-ten Teilchens bezeichnet.

(a) Wie lautet die kanonische Phasenraumdichte für das 2D relativistische Gas mit gegebener Teilchenzahl N? Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_{K}. (5P)

(b) Berechnen Sie die freie Energie $F(T, A, N)$ und die Entropie $S(T, A, N)$ für $N \gg 1$. Erfüllt die Entropie den 3. Hauptsatz der Thermodynamik? (5P)

(c) Wie lautet die großkanonische Phasenraumdichte für das 2D relativistische Gas? Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme Z_{G} und das chemische Potential $\mu(T, A, N)$. (5P)

3. Ideales Bosegas (14P)

Betrachten Sie ein Gas aus nichtwechselwirkenden Bosonen mit Spin $S = 0$ und mit einer allgemeinen Zustandsdichte der Form

$$D(E) = KE^{\gamma-1}. \tag{3}$$

(a) Welche Einheit hat die Größe K? (1P)

(b) Leiten Sie mit Hilfe der oben gegebenen Zustandsdichte einen allgemeinen Ausdruck für die mittlere Teilchenzahl N und die mittlere innere Energie U des Bosegases ab. Drücken Sie das Ergebnis mit Hilfe der Bose-Integrale $g_\alpha(z)$ aus. (4P)

(c) Zeigen Sie, dass im thermodynamischen Limes die Relation $J = -U/\gamma$ zwischen der inneren Energie U und dem großkanonischen Potential J gilt. (5P)

(d) Für welche der folgenden Exponenten $\gamma = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ gibt es eine Bose-Einstein Kondensation? Begründen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie die Kondensationstemperatur T_c für einen γ-Wert Ihrer Wahl. (4P)

4. Fermionen im Schwerefeld (16P)

Betrachten Sie ein eindimensionales Gas aus Fermionen mit Spin S im Schwerefeld. Die Einteilchenenergien E_n sind in diesem Fall in guter Nährerung durch

$$E_n = mgh_0 n^{\frac{2}{3}}, \qquad h_0 = \left(\frac{9\pi^2\hbar^2}{8m^2 g}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{4}$$

gegeben, wobei m die Masse der Fermionen und g die Erdbeschleunigung bezeichnet.

(a) Berechnen Sie, unter der Annahme $E_0 = mgh_0 \to 0$, die Zustandsdichte $D(E)$ für dieses Problem. (3P)

(b) Berechnen Sie die Fermienergie E_F für gegebene Teilchenzahl N und die Nullpunktsenergie $U(T = 0)$ als Funktion von E_F und N. (4P)

(c) Berechnen Sie die Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials $\mu(T)$ bis zur Ordnung $(k_B T/E_F)^2$. (5P)

(d) Berechnen Sie die Temperaturabhängigkeit der innere Energie $U(T)$ bis zur Ordnung $(k_B T/E_F)^2$. (4P)

Achtung: Falls 4a) nicht gelöst wird, können Aufgaben 4b)-4d) mit Hilfe der Zustandsdichte $D(E) = KE$ gerechnet werden.

Formelsammlung:

- **Gamma Funktion:**

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty dy\, y^{n-1} e^{-y}, \qquad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{5}$$

- **Stirling Formel:**

$$N! \approx \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N, \qquad \ln N! \approx N \ln N - N \tag{6}$$

- **Volumen einer d-dimensionalen Kugel:**

$$V_d(R) = \int_{\sum x_i^2 < R^2} d^d x = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} R^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} \tag{7}$$

- **Weitere Integrale:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{2\pi\sigma^2}, \qquad \int_0^\infty dx\, x^n e^{-\alpha x} = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}} \tag{8}$$

- **Fermi-Integral:**

$$f_\alpha(z) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{(e^y/z)+1} dy = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n^\alpha} \tag{9}$$

- **Bose-Integral:**

$$g_\alpha(z) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{(e^y/z)-1} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}, \qquad g_\alpha(1) = \zeta(\alpha) \tag{10}$$

  Spezielle Werte:
  $g_0(1) = \infty$ | $g_{1/2}(1) = \infty$ | $g_1(1) = \infty$ | $g_{3/2}(1) = 2.612$ | $g_2(1) = 1.645$ | $g_3(1) = 1.202$

- **Werte der Zeta-Funktion $\zeta(\alpha)$:**
  $\zeta(2) = \pi^2/6$ | $\zeta(4) = \pi^4/90$ | $\zeta(6) = \pi^6/945$

- **Werte der Koeffizienten J_n in der Sommerfeld Entwicklung:**
  $J_0 = 1$ | $J_2 = \pi^2/3$ | $J_4 = 7\pi^4/15$ | $J_n = 0$ für n ungerade