Statistische Physik I (SS 2015): Tutorium 1

1. Stirling Formel

Betrachten Sie die Darstellung der Fakultät $n!$ als Spezialfall der Gamma-Funktion

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx. \tag{1}$$

(a) Skizzieren Sie den Verlauf des Integranden $f(x) = x^n e^{-x}$ für große n.

(b) Schreiben Sie $f(x) = e^{g(x)}$ und entwickeln Sie den Exponenten $g(x)$ um sein Maximum.

(c) Leiten Sie daraus die Stirling Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{2}$$

für große n her.

(d) Begründen Sie die weitere Approximation

$$\log(n!) \approx n\log(n) - n \tag{3}$$

anhand eines konreten Zahlenbeispiels.

2. Polarisierung von Kernspins

In einem NMR Experiment befinden sich in einer Probe aus $N = 10^{23}$ Wasserstoffkernen mit Kernspin $I = 1/2$ in einem äußeren Magnetfeld B. Jeder Spin kann entweder den Zustand $|\uparrow\rangle$ oder $|\downarrow\rangle$ annehmen. Die Energienniveaus der beiden Zustände im Magnetfeld sind gegeben durch

$$E_\uparrow = -\gamma\hbar B, \qquad E_\downarrow = \gamma\hbar B, \tag{4}$$

wobei $\gamma = 267.5\times10^6\mathrm{s}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$ und $\hbar = 1.05\times10^{-34}$ J s^{-1}. Die Kernspins sind unabhängig von einander und $p_\downarrow$ und $p_\uparrow = 1 - p_\downarrow$ bezeichnen die Wahrscheinlichkeiten, dass sich ein einzelner Spin im Zustand $|\downarrow\rangle$ bzw. $|\uparrow\rangle$ befindet.

(a) Geben Sie einen Ausdruck für die Gesamtenergie E als Funktion der Spinpopulationen $N_\uparrow$ und $N_\downarrow$ an und einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit $w_N(E)$, dass sich das System in einem Zustand mit Gesamtenergie E befindet.

(b) Nähern Sie $w_N(E)$ durch eine Gaussverteilung und geben Sie den wahrscheinlichsten Energiewert $\widehat{E}$ und die mittlere Energieabweichung ΔE an. (Orientieren Sie sich am Kapitel 1.2 der Vorlesung).

(c) Betrachten Sie nun eine thermische Verteilung mit

$$p_\downarrow = \frac{e^{-\frac{(E_\downarrow - E_\uparrow)}{k_B T}}}{1 + e^{-\frac{(E_\downarrow - E_\uparrow)}{k_B T}}}, \tag{5}$$

wobei $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1}. Wieviele Spins befinden sich bei Temperaturen von $T = 300$ K und $T = 0.1$ K *im Mittel* in den Zuständen $|\downarrow\rangle$ bzw. $|\uparrow\rangle$? *Hinweis:* Drücken Sie das Resultat in der Form $\langle N_\downarrow \rangle = N(1/2 + \varepsilon)$ aus.

(d) Wie groß ist die Standardabweichung der Besetzungszahlen bei $T = 300$ K und $T = 0.1$ K? Ist die Magnetisierung $\langle N_\downarrow \rangle - \langle N_\uparrow \rangle$ statistisch von 0 unterscheidbar?

3. Vollständige Differenziale

Welcher der folgenden Ausdrücke ist ein vollständiges Differential (begründen)? Was ist dessen Stammfunktion?

$$\begin{aligned} f_1 &= 2T^4 V dV + 3T^2 V^2 dT \\ f_2 &= 6\sqrt{T} V dV + \frac{3V^2}{2\sqrt{T}} dT \end{aligned}$$

4. Ideales Gas

Ein ideals Gas besteht aus $N = 3 \times 10^{21}$ Teilchen und befindet sich in einem dehnbaren Behälter mit Volumen $V = 100$ mL. Um wieviel Grad Celsius muss sich das Gas erwärmen, damit sich bei konstanter Teilchenzahl das Volumen um 2% vergrößert und der Druck von 100 kPa auf 101 kPa steigt? *Hinweis:* Benützen Sie die thermische Zustandsgleichung für ein ideales Gas und betrachten Sie kleine Änderungen, dT, dV und dp.

Kreuze für: 1 a)+b), 1 c)+d), 2 a)+b), 2 c)+d), 3, 4