Statistische Physik I (SS 2015): Tutorium 2

5. Carnot-Wärmepumpe

Betrachten Sie einen Carnot-Prozess wie in der Vorlesung, der aber in umgekehrter Richtung durchlaufen wird. Als Arbeitsmedium wird eine ideales Gas verwendet. Der Arbeitszyklus startet im Punkt 1 bei einem Volumen V_1 und Temperatur T_1. Das System durchläuft dann eine adiabatische Expansion, eine isotherme Expansion, eine adiabatische Kompression und eine isotherme Kompression.

(a) Skizzieren Sie den Prozess im pV- und im TS-Diagramm und berechnen Sie explizit die in jedem Prozessschritt geleistete Arbeit ΔW_{12}, ΔW_{23}, ΔW_{34} und ΔW_{41} als Funktion von Temperatur und Volumen der jeweiligen Anfangs- und Endzustände. Benutzen Sie dazu die thermische und kalorische Zustandsgleichung, und die Tatsache, dass bei einem adiabatischen Prozess für die *geleistete* Arbeit gilt $\Delta W = \int \delta W = -\int dE$.

(b) Zeigen Sie, dass für einen adiabatischen Prozess aus $p = Nk_BT/V$ und $dE = \frac{3}{2}Nk_BdT$ folgt, dass

$$\left(\frac{T_f}{T_i}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{V_i}{V_f}, \tag{1}$$

wobei V_i und V_f das Anfangs- und Endvolumen und T_i und T_f die Anfangs- und Endtemperatur bezeichnen.

(c) Leiten Sie mit Hilfe von b) einen Ausdruck für die ingesamt geleistete Arbeit W und für die *Heizeffektivität*

$$\eta^H = \frac{-Q_1}{-W}, \tag{2}$$

her, wobei Q_1 die vom warmen Reservoir (T_1) ans System übertragene Wärme bezeichnet. Interpretieren Sie η^H und vergleichen Sie η^H einer idealen (Carnot) Wärmepumpe bei $T_1 = 300$ K und $T_2 = 270$ K mit der direkten Umwandlung von mechanischer oder elektrischer Arbeit in Wärme, $\eta^H = 1$.

6. Thermodynamische Potenziale: ideales Gas

Die Entropie eines idealen Gases ist gegeben durch (wird später in der Vorlesung hergeleitet)

$$S \equiv S(E, V, N) = k_B N \left[\frac{5}{2} + \log\left(C\frac{V}{N}\left(\frac{E}{N}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right], \tag{3}$$

mit einer Konstanten $C = (4\pi m/(3h^2))^{3/2}$.

(a) Leiten Sie aus der Entropie den Ausdruck für die Energie $E = E(S, V, N)$ eines idealen Gases her. Zeigen Sie: $E(S, V, N)$ ist extensiv.

(b) Leiten Sie entweder aus der Entropie oder der Energie einen Ausdruck für die Temperatur T ab und bestimmen Sie daraus die kalorische Zustandsgleichung $E(T, N)$ (siehe Vorlesung).

(c) Leiten Sie einen (kompakten) Ausdruck für die Freie Energie $F = F(T, V, N)$ eines idealen Gases durch Legendre Transformation der Energie her. Welche Information geht bei der kalorischen Zustandsgleichung $E(T, N)$ im Vergleich zur Legendre transformierten Freien Energie verloren?

(d) Leiten Sie den Ausdruck für den Druck eines idealen Gases aus $F(T, V, N)$ ab und bestimmen sie daraus die thermische Zustandsgleichung.

7. Thermodynamische Potentiale: magnetisches System

Für eine magnetisches Probe in einem externen Magnetfeld B ändert sich bei einem reversiblen Prozess die innere Energie U des Systems gemäß

$$dU(S, M, N) = TdS + BdM + \mu dN, \tag{4}$$

wobei M die totale Magnetisierung (extensiv) der Probe und μ das chemische Potential bezeichnet.

(a) Bestimmen daraus analog zur Vorlesung für dieses System die thermodynamischen Potentiale $F \equiv F(T, M, N)$ und $G \equiv G(T, B, N)$ und ihre Differenziale.

(b) Für ein paramagnetisches System aus N nicht-wechselwirkenden Spin-1/2 Teilchen erhalten wir

$$G(T, B, N) = -k_B T N \log \left[2 \cosh \left(\frac{mB}{2k_B T} \right) \right], \tag{5}$$

wobei m das magnetische Moment eines einzelnen Spins bezeichnet. Leiten Sie daraus durch differenzieren einen Ausdruck für die Magnetisierung M ab.

Kreuze für: 5a); 5b); 5c); 6a)+b); 6c)+d); 7a)+b)