Statistische Physik I (SS 2015): Tutorium 3

8. Prozesse im idealen Gas

Mittels der Zustandsgleichungen eines idealen Gases,

$$pV = Nk_BT \quad \text{und} \quad E = \frac{3}{2}Nk_BT, \tag{1}$$

können Prozesse beschrieben werden, für die gilt pV^κ =konstante Zahl.

(a) Die Teilchenzahl sei konstant. Welche Prozesse werden mit $\kappa = 0$, $\kappa = 1$ und $\kappa = 5/3$ beschrieben?

(b) Das System werde nun von einem Zustand (p_1, V_1) in einen Zustand (p_2, V_2) mit $V_2 < V_1$ gebracht. Berechnen Sie für $\kappa = 0$, $\kappa = 1$ und $\kappa = 5/3$ die Arbeit ΔW (Vorzeichen?), welche für diese Volumensänderung am System geleistet werden muss.

(c) Berechnen Sie die Änderung der inneren Energie ΔE.

(d) Ein Zylinder mit Höhe $h = 1\,\mathrm{m}$ und Endfläche $A = 1\,\mathrm{m}^2$ enthalte $N = 2.44 \times 10^{25}$ Moleküle eines idealen Gases, bei Raumtemperatur ($T = 300\,\mathrm{K}$).

  (1) Wie hoch ist der Druck im Zylinder?

  (2) Der Zylinder werde nun durch einen Kolben der Masse $m = 100\,\mathrm{kg}$ abgeschlossen und isotherm unter Einwirkung der Schwerkraft ($g = 9.8\,\mathrm{m\ s}^{-2}$) komprimiert. Was sind nun Druck und Volumen im Zylinder? Schätzen Sie die Volumsänderung δV mit Hilfe der isothermen Kompressibilität des Gases, κ_T, ab.

  (3) Der Zylinder wird nun isobar um 3K erwärmt. Um wieviel ändert sich die innere Energie? Vergleichen Sie dies mit der aus der Höhenänderung des Kolbens hervorgehende Arbeit.

9. Maxwell- und Kreisrelationen

Aus der Jacobi-Determinante kann die Eulersche Kreisrelation

$$\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)_c \left(\frac{\partial b}{\partial c}\right)_a \left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)_b = -1, \tag{2}$$

entnommen werden.

(a) Leiten Sie die Eulersche Kreisrelation aus den Eigenschaften der Jacobi-Determinante her.

(b) Zeigen Sie mittels der Kreisrelation für S, T und p, dass für einen reversiblen, isobaren Prozeß in einem idealen Gas

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{V}{C_p} \tag{3}$$

gilt. Berechnen Sie aus der isobaren Wärmekapazität und der reversiblen Entropieänderung den Term $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$ und zeigen Sie anhand des Guggenheim-Quadrats, dass für ein ideales Gas $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\frac{V}{T}$.

(c) Berechnen Sie die Ableitung $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ für ein van den Waals Gas mit Zustandsgleichung

$$p = \frac{k_B T}{v-b} - \frac{a}{v^2}, \text{ mit } v = \frac{V}{N}. \tag{4}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Eulersche Kreisrelation. Wieso ist hier die Kreisrelation besonders nützlich?

(d) Zeigen Sie, dass für ein beliebiges isoliertes Gas gilt

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E = \frac{1}{C_V}\left(p - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right). \tag{5}$$

Hinweis: Benützen Sie die Eigenschaften der Jacobi-Determinante und $dE = TdS - pdV$.

10. Maxwell Diagramm

Betrachten Sie ein magnetisches System mit innerer Energie $U(S, M, N)$ mit

$$dU(S, M, N) = TdS + BdM + \mu dN \tag{6}$$

und die daraus aus Legendre-Transformationen abgeleiteten Potentiale $H(S, B, N)$, $A(S, M, \mu)$ und $R(S, B, \mu)$. Konstruieren Sie aus diesen vier Potentialen ein Maxwell-Diagramm (Guggenheim-Quadrat) analog zur Vorlesung. Bestimmen Sie insbesondere die Richtung der Ableitungspfeile und die Vorzeichenregeln für die Maxwellrelationen.

Kreuze für: 8a)+b)+c), 8d), 9a)+b), 9c), 9d), 10