Statistische Physik I (SS 2015): Tutorium 4

11. Mischentropie

Betrachten Sie einen isolierten Behälter mit Gesamtvolumen $V = V_A + V_B$, der durch eine Wand in zwei Kammern mit Volumen V_A und V_B geteilt ist. In der ersten Kammer befindet sich ein (ideales) Gas mit N_A Teilchen der Sorte A, in der zweiten Kammer ein (ideales) Gas mit N_B Teilchen der Sorte B.

(a) Zeigen Sie, daß ausgehend von der mikrokanonischen Zustandssumme, die Gesamtentropie des System geschrieben werden kann als

$$S = k_B \left[N_A \ln\left(\frac{V_A}{N_A}\right) + N_B \ln\left(\frac{V_B}{N_B}\right) \right] + \bar{S}, \tag{1}$$

wobei $\bar{S}$ ein Beitrag zur Entropie ist, der nicht vom Volumen abhängt.

(b) Es wird nun die Trennwand entfernt und die Gase durchmischen sich im Gesamtvolumen V. Berechnen Sie die Änderung der Entropie ΔS die sich durch diese Durchmischung ergibt. Zeigen Sie weiters, daß für zwei idente Gase mit $N_A/V_A = N_B/V_B = N/V$ diese Mischentropie verschwindet.

(c) Berechnen Sie nun nochmals die Mischentropie ΔS, diesmal aber ohne den Boltzmannfaktor $N!$ in der Zustandsumme einzuführen. Zeigen Sie, daß diese Rechnung für verschiedene Gase zum gleichen Ergebnis führt, aber für die Durchmischung von identen Gasen zum Ergebnis $\Delta S > 0$ führt (Gibb'sches Paradoxon).

Hinweis: Benutzen Sie für diese Aufgabe die Resultate zur Herleitung der Sackur-Tetrode Formel aus der Vorlesung.

12. Ideales Gas im Schwerefeld

Gegeben sei ein ideales (nicht-wechselwirkendes) Gas im Schwerefeld, welches bei $z = 0$ durch den Boden begrenzt ist. Im Folgenden soll nur die Bewegung entlang der vertikalen z-Achse betrachtet werden, welche für $z > 0$ durch die Hamiltonfunktion

$$H(\underline{z}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + mgz_i \tag{2}$$

beschrieben wird. N ist die Anzahl der Gasteilchen.

(a) Betrachten Sie zuerst den Fall $N = 1$. Lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und skizzieren Sie die Bewegung des Teilchens im Phasenraum für die Anfangsbedingungen $z_0 > 0$ und $p_0 > 0$. Skizzieren Sie die mikrokanonische Phasenraumdichte $\rho_{\mathrm{MK}}(z, p)$ für ein Teilchen mit einer Energie im Intervall $[E - \Delta, E]$, wobei $\Delta \ll E$.

(b) Berechnen Sie die Zustandssumme $\Omega(E, \Delta, N = 1)$ und die mikrokanonische Entropie $S(E)$ für ein Teilchen im Schwerefeld.

(c) Betrachten Sie nun allgemein $N > 1$. Welche Dimension hat der Phasenraum (Γ-Raum) für diesen Fall und welche Dimension hat der μ-Raum? Skizzieren Sie die Bewegung der Gasteilchen im μ-Raum.

(d) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_{K} für N Teilchen im Schwerefeld.

(e) Zeigen Sie, daß für den kanonischen Mittelwert der Höhe der Gaswolke gilt

$$\bar{h} := \frac{\sum_i \langle z_i \rangle}{N} = -\frac{1}{\beta m N} \frac{\partial}{\partial g} \ln Z_G. \tag{3}$$

Berechnen Sie $\bar{h}(T)$.

(f) **Freiwillige Zusatzaufgabe:** Versuchen Sie die mikrokanonische Zustandssumme eines Gases im Schwerefeld zu berechnen.

13. Großkanonisches Ensemble

(a) Zeigen Sie, daß für das großkanonische Ensemble aus der Definition der Entropie $S = -k_B \langle \ln \rho_G \rangle$ und dem großkanonischen Potential $J = -k_B T \ln Z_G$ die allgemeine Relation

$$S = -\left. \frac{\partial J}{\partial T} \right|_{V,\mu} \tag{4}$$

folgt.

(b) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme Z_G, $J(T, V, \mu)$ und $\langle N \rangle (T, \mu, V)$ für ein ideales Gas (in einem 3D Behälter mit Volumen V) und verifizieren Sie die thermische Zustandsgleichung. Bestimmen Sie $\mu(T, V, N)$ und skizzieren Sie μ als Funktion der Temperatur. *Hinweis:* Benutzen Sie das Resultat für $Z_K(N)$ aus der Vorlesung und $\lambda_{\mathrm{th}} = \sqrt{h^2/(2\pi m k_B T)}$.

(c) Drücken Sie die Varianz der Teilchenzahl $(\Delta N)^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ in einem großkanonischen Ensemble durch die 2. Ableitung von $\ln Z_G$ aus und zeigen Sie, daß für ein ideales Gas

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{5}$$

Kreuze für: 11a)+b); 11c); 12a)+b); 12c)+d)+e); 13 a)+b); 13c).