Statistische Physik I (SS 2015): Tutorium 5

14. Isoliertes Spin-Ensemble

Betrachten Sie ein isoliertes System aus N nicht-wechselwirkenden Spin-1/2 Teilchen mit Zuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ und Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{E_0}{2} \sum_{i=1}^{N} |\uparrow\rangle_i \langle\uparrow|. \tag{1}$$

(a) Ausgehend vom mikrokanonischen Dichteoperator $\hat{\rho}_{\mathrm{MK}}(E)$, bestimmen Sie die Entropie $S(E)$ und skizzieren Sie deren Verlauf als Funktion der Energie E bei konstantem $N \gg 1$.

(b) Berechnen Sie die Temperatur T als Funktion von E und diskutieren Sie das Resultat.

(c) Berechnen und skizzieren Sie den spezifischen Wärmekoeffizienten C_V als Funktion von E.

15. Dichteoperator eines Zwei-Niveau-Systems

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Zwei-Niveau-System (ZNS) mit Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Gegeben sei ein allgemeiner Dichteoperator des ZNS in Matrixdarstellung

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei $\rho_{ij} = \langle i|\hat{\rho}|j\rangle$.

(a) Wieviele unabhängige reelle Parameter sind zur Bestimmung eines beliebigen Dichteoperators für ein ZNS nötig? Begründen Sie Ihre Antwort mit den allgemeinen Eigenschaften von Dichteoperatoren.

(b) Berechnen Sie den Vektor $\vec{S} = (\langle\hat{\sigma}_x\rangle, \langle\hat{\sigma}_y\rangle, \langle\hat{\sigma}_z\rangle)^T$ der sich aus den Erwartungswerten der drei Pauli-Matrizen $\sigma_{x,y,z}$ für einen allgemeinen Dichteoperator ergibt. Drücken Sie die Dichtematrix in Gleichung (2) durch die Erwartungswerte S_x, S_y und S_z aus.

(c) Drücken Sie $\vec{S}$ in Polarkoordinaten aus und bestimmen Sie die Beziehung zwischen (r, θ, ϕ) und den Elementen ρ_{ij}.

(d) Berechnen Sie die Reinheit $R = \mathrm{Sp}\{\hat{\rho}^2\}$ von $\hat{\rho}$ und drücken Sie das Resultat als Funktion der Matrixelemente ρ_{ij} und mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung von $\vec{S}$ aus.

(e) Betrachten Sie nun ein System aus 2 Zwei-Niveau-Systemen mit Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$. Der Zustand des Gesamtsystem sei durch einen sogenannten “Werner Zustand”

$$\hat{\rho} = p|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + \frac{(1-p)}{4}\hat{\mathbb{1}}, \tag{3}$$

beschrieben, wobei $p \in [0, 1]$ und

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle_a |1\rangle_b - |1\rangle_a |0\rangle_b \right). \tag{4}$$

i. Berechnen Sie den reduzierten Dichteoperator $\hat{\rho}_a = \mathrm{Sp}_b\{\hat{\rho}\}$. Warum gilt $\hat{\rho}_a = \hat{\rho}_b$?

ii. Berechnen Sie die Reinheit des Werner Zustands und die von $\hat{\rho}_a$.

16. Harmonische Oszillatoren: mikrokanonisch

Ein System aus N unabhängigen harmonischen Oszillatoren sei durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hbar\omega \sum_{i=1}^{N} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \tag{5}$$

beschrieben. Berechnen Sie die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E, N)$. *Hinweis.* Nehmen Sie an, dass $E/(\hbar\omega) \gg 1$ und approximieren Sie Summen mit Integralen. Die Aufgabe ist aber auch exakt lösbar.

Kreuze für: 14a)+b); 14c); 15a)+b); 15c); 15d); 16