Statistische Physik I (SS 2015): Tutorium 6

17. Thermische und kohärente Zustände eines harmonischen Oszillators

Betrachten Sie einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator mit Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}, \tag{1}$$

und Energie-Eigenzuständen $|n\rangle$. Vergleichen Sie im Folgenden den thermischen (kanonischen) Zustand des harmonischen Oszillators $\hat{\rho}_{\mathrm{K}}$ mit einem sogenannten kohärenten Zustand

$$\hat{\rho}_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|, \qquad \text{mit} \qquad |\alpha\rangle := e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{2}$$

(a) Berechnen Sie $\langle \hat{n} \rangle$ und die Besetzungswahrscheinlichkeiten p_n für die zwei Zustände und vergleichen Sie (Skizze) die resultieren Besetzungsverteilungen bei gleicher mittlerer Besetzungszahl $\langle \hat{n} \rangle > 1$.

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle$ und $\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$ für die zwei Zustände.

(c) Berechnen Sie die Entropie der zwei Zustände für $\langle \hat{n} \rangle \gg 1$.

18. Schwankungsbreite der Energie eines kanonischen Ensembles

Betrachten Sie ein allgemeines System mit Hamiltonoperator $\hat{H}$, welches an ein Wärmebad mit Temperatur T gekoppelt ist. Zeigen Sie, dass für die Schwankungsbreite der inneren Energie gilt

$$\sqrt{\frac{\langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2}{\langle \hat{H} \rangle^2}} = \sqrt{\frac{C_V k_B T^2}{U^2}}, \tag{3}$$

wobei $U = \langle \hat{H} \rangle$. (Vgl. Aufgabe 13).

19. Eindimensionales Kastenpotential

Ein Teilchen befinde sich in einem eindimensionalen Kastenpotential der Breite L mit unendlich hohen Wänden. Wie aus der Quantenmechanik I bekannt, erhält man für dieses System folgende Energieeigenwerte

$$\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle, \qquad E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty \tag{4}$$

(a) Berechnen Sie zuerst die kanonische Zustandssumme für ein *klassisches* Teilchen im eindimensionalen Kastenpotential.

(b) Bestimmen Sie nun den kanonischen Dichteoperator $\hat{\rho}_{\mathrm{K}}$, die Zustandssumme Z_{K} und die Besetzungswahrscheinlichkeiten $p_n = \langle \psi_n | \hat{\rho}_{\mathrm{K}} | \psi_n \rangle$ für ein Teilchen im Kastenpotential als Funktion der Energien E_n. *Hinweis:* Die Zustandssumme muss nicht explizit berechnet werden.

(c) Berechnen Sie näherungsweise den Erwartungswert der Energie des Teilchens im Limes hoher Temperatur. *Hinweis*: Approximieren Sie die Zustandsumme durch ein Integral.

Kreuze für: 17a); 17b); 17c); 18; 19a)+b); 19c)