Statistische Physik I (SS 2015): Tutorium 7

20. Dichteoperatoren

(a) Gegeben seinen 2 Dichteoperatoren mit Matrixdarstellung

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\rho}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

in der Basis $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$. Berechnen Sie die Reinheit und die Entropie von $\hat{\rho}_{1,2}$ sowie die Operatoren $\hat{C}_1 = e^{-x\hat{\rho}_1}$ und $\hat{C}_2 = \cos(\frac{\pi}{2}\hat{\rho}_2)$. *Hinweis:* Diagonalform!

(b) Gegeben Sei der großkanonische Dichteoperator

$$\hat{\rho}_{\mathrm{G}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{G}}} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} \tag{2}$$

und ein beliebiger anderer Dichteoperator $\hat{\rho}'$. Zeigen Sie, dass aus der Ungleichung für die Boltzmann'sche Eta-Funktion

$$\mathbf{H}(\hat{\rho}_{\mathrm{G}}, \hat{\rho}') \leq 0 \tag{3}$$

folgt, dass

$$J(\hat{\rho}_{\mathrm{G}}) \leq J(\hat{\rho}'), \tag{4}$$

wobei $J(\hat{\rho})$ das entsprechende großkanonische Potential bezeichnet.

21. Zustandsdichten

(a) Die Rotation eines starren Körpers mit Trägheitsmoment I wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{B}{\hbar^2}\hat{\vec{L}}^2, \tag{5}$$

mit Rotationskonstante $B = \hbar^2/(2I)$ beschrieben. $\hat{\vec{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ bezeichnet den Drehimpulsoperator mit Eigenwertgleichungen

$$\hat{\vec{L}}^2|l, m_l\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m_l\rangle, \qquad \hat{L}_z|l, m_l\rangle = \hbar m_l|l, m_l\rangle, \tag{6}$$

wobei $l = 0, 1, 2, ...$ und $m_l = -l, -l+1, \ldots, l$. Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(E)$ der Energieniveaus eines starren Rotors für $E \gg B$.

(b) Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(E)$ für Teilchen mit Spin S in einer 3D harmonischen Falle mit 1-Teilchenhamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{i=x,y,z} \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_i^2\hat{q}_i^2. \tag{7}$$

Benutzen Sie, falls hilfreich,

$$\int d^3x_i \, F(E = \sum_i x_i) = \int dE \, F(E) \int d^3x_i \, \delta(E - \sum_i x_i). \tag{8}$$

22. Relativistisches Fermi Gas

Betrachten Sie ein extrem relativistisches Gas aus Fermionen mit Spin 1/2 und Energiedispersionsrelation

$$E_{\vec{k}} = \sqrt{c^2\hbar^2|\vec{k}|^2 + m^2c^4} \approx c\hbar|\vec{k}|. \tag{9}$$

(a) Berechnen Sie die Fermi Energie E_F eines extrem relativistischen Fermi Gases als Funktion der Teilchendichte $n = N/V$.

(b) Zeigen Sie, dass für ein extrem relativistisches Fermi Gas der Zusammenhang

$$U = 3pV \tag{10}$$

für alle Temperaturen gilt und berechnen Sie $U(T = 0)$ bzw $p(T = 0)$.

Kreuze für: 20a); 20b); 21a); 21b); 22a); 22b)