Gerhard Kahl & Florian Libisch

STATISTISCHE PHYSIK I (VU – 136.020)

1. Test am 22.4.2016

NAME MN:

Bitte beginnen Sie jedes Beispiel auf einem neuen Blatt!

Die physikalische Bedeutung aller verwendeter Symbole muß erläutert werden!

T1. (20 Punkte)
Gegeben ist ein eindimensionales System mit einem Teilchen, das in der z-Richtung der Schwerkraft (d.h. $V(z) = mgz$) ausgesetzt ist. Bei $z = 0$ ist das System durch eine horizontale, ideal reflektierende Wand begrenzt.

(i) Geben Sie die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ und den Konfigurationsraum Π des Systems an; schreiben Sie die Hamilton-Bewegungsgleichungen an;

(ii) berechnen Sie aus diesen Gleichungen die allgemeine Lösung, also $z(t)$ und $p(t)$, mit Anfangsbedingungen $z(t = 0) = z_0$ und $p(t = 0) = p_0$;

(iii) zeichnen Sie für zwei Energiewerte E_1 und E_2 ($E_1 < E_2$) jene Trajektorien im Phasenraum Γ, für die $E =$ const.; um welche Kurven handelt es sich? Geben Sie explizit die Werte an, bei denen die Trajektorie die z- bzw. die p-Achse schneidet;

(iv) betrachten Sie nun eine dieser Kurven und beschreiben Sie verbal, wie sich diese Trajektorie des Mikrozustandes in die Bewegung des Teilchens übersetzt; beschreiben Sie insbesondere jene Aspekte der Teilchenbewegung, die den Schnittpunkten der Phasenraumtrajektorie mit den Achsen p und q entsprechen.

T2. (15 Punkte)
Gehen Sie von der Grundgleichung der Thermodynamik aus, die Entropie-, Volums- und Teilchenänderungen berücksichtigt.

(i) Ermitteln Sie durch eine geeignete Legendre-Transformation das totale Differential des großen Potentials J;

(ii) geben Sie die natürlichen Variablen von J an; welche thermodynamischen Variablen erhält man durch Ableitung von J nach seinen natürlichen Variablen;

(iii) geben Sie die explizite Form für die Berechnung von J an
(**Hinweis:** es gilt: $E = TS - PV + \mu N$);

(iv) führen Sie nun eine geeignete Legendre-Transformation an J durch, die die V-Abhängigkeit von J durch eine P-Abhängigkeit ersetzt; interpretieren Sie das Ergebnis und erklären Sie, warum das daraus resultierende thermodynamische Potential nicht zur Beschreibung eines realistischen Systems geeignet ist; geben Sie die daraus resultierende Gibbs-Duhem Beziehung an.

T3. (25 Punkte)
Ein thermisch isolierter Behälter wird durch eine verschiebbare, undurchdringliche Trennwand in zwei Teilvolumina V_1 und V_2 (mit Teilchenzahlen N_1, N_2 und Energien E_1, E_2) geteilt. $E = E_1 + E_2$, $N = N_1 + N_2$ und $V = V_1 + V_2$ sind vorgegeben. $P(E_1, V_1)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilsystem 1 die Energie E_1 und das Volumen V_1 hat.

(i) Geben Sie an, wie man diese Wahrscheinlichkeitsverteilung (bis auf einen irrelevanten Normierun faktor) aus der Zahl der Mikrozustände der beiden Teilsysteme (also Ω_1 und Ω_2) berechnen kann;
(ii) berechnen Sie mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung die wahrscheinlichste Aufteilung der Gesamtenergie und des Gesamtvolumens auf die beiden Teilsysteme (also $\tilde{E}_1$ und $\tilde{E}_2 = E - \tilde{E}_1$, sowie $\tilde{V}_1$ und $\tilde{V}_2 = V - \tilde{V}_1$);
(iii) leiten Sie aus dieser Rechnung Bedingungen an die makroskopischen thermodynamischen Variablen her, die diese wahrscheinlichste Aufteilung der Energie und des Volumens garantieren.

In beiden Teilvolumina befinden sich nun ideale Gase. Zu Beginn des Prozesses sei

$$N_1 = \frac{1}{3}N \quad E_1 = \frac{1}{2}E, \qquad N_2 = \frac{2}{3}N \quad E_2 = \frac{1}{2}E;$$

(iv) **Zusatzfrage:** welches der beiden Teilsysteme ist zu Beginn des Prozesses wärmer;
(v) berechnen Sie für diese Systemparameter $\tilde{E}_1/\tilde{E}_2$ und $\tilde{V}_1/\tilde{V}_2$.

Hinweis: Die (mikrokanonische) Entropie des idealen Gases ($D = 3$) ist durch

$$S_m = k_B N \left[\frac{3}{2}\ln\frac{E}{N} + \ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\ln\frac{4\pi m}{3h^2} + \frac{5}{2}\right]$$

gegeben.

T4. (15 Punkte)
Gegeben ist ein ideales Gas mit den Zustandsgleichungen

$$PV = Nk_B T \qquad E = \frac{3}{2}Nk_B T.$$

Wir betrachten Prozesse, die durch $VP^\gamma =$ const. definiert sind, wobei γ eine Zahl sei. Bei $\gamma = 1$ handelt es sich um einen isothermen Prozeß, $\gamma \to \infty$ spezifiziert einen isobaren Prozeß; für alle anderen γ-Werte handelt es sich um einen allgemeinen, sogenannten polytropen Prozeß.

Gegeben sind zwei Zustände (P_1, V_1) und (P_2, V_2) (mit $V_1 < V_2$) die durch einen Prozeß verbunden sind, der durch $VP^\gamma =$ const. definiert ist.

Berechnen Sie:

(i) die Arbeit ΔW, die Sie bei einer Volumsänderung von V_1 auf V_2 leisten müssen;
(ii) die Änderung der inneren Energie ΔE bei Übergang von (P_1, V_1) zu (P_2, V_2);
(iii) die bei diesem Prozeß auftretende Wärme, ΔQ, (für $\gamma \neq 1$).
(iv) Für welchen γ-Wert ist der Prozeß adiabatisch?