Gerhard Kahl & Florian Libisch

STATISTISCHE PHYSIK 1 (VU – 136.020)

6. Tutoriumstermin (13.5.2016)

T18. Gegeben ist ein ideales Gas von N identischen, zweiatomigen Molekülen (z.B. H_2), die sich in einem Teilvolumen des $\mathbb{R}^3$ befinden. Die Hamilton-Funktion eines Moleküls ist durch

$$\mathcal{H}_{\text{mol}}(\mathbf{p}_{1A}, \mathbf{p}_{1B}, \mathbf{q}_{1A}, \mathbf{q}_{1B}) = \frac{\mathbf{p}_{1A}^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_{1B}^2}{2m} + A|\mathbf{q}_{1A} - \mathbf{q}_{1B}|^2$$

gegeben, wobei A positiv ist und sich die Indizes 'A' und 'B' auf die beiden Atome beziehen.

Die Hamilton-Funktion des Gesamtsystems ist durch

$$\mathcal{H}_{\text{ges}}(\mathbf{p}_A^N, \mathbf{p}_B^N, \mathbf{q}_A^N, \mathbf{q}_B^N) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{H}_{\text{mol}}(\mathbf{p}_{iA}, \mathbf{p}_{iB}, \mathbf{q}_{iA}, \mathbf{q}_{iB})$$

gegeben.

Berechnen Sie im kanonischen Ensemble

(a) die Zustandssumme, die freie Energie sowie die Wärmekapazität des Systems;

(b) interpretieren Sie das Ergebnis aus (a) in Hinblick auf den Gleichverteilungssatz;

(c) den mittleren quadratischen Abstand der Atome in einem Molekül, also $\langle \mid \mathbf{q}_{iA} - \mathbf{q}_{iB}|^2 \rangle_k$, als Funktion der Temperatur T

Hinweis: bei der Berechnung der Zustandssumme empfiehlt es sich, Schwerpunkts- und Abstandsvektoren innerhalb jedes Moleküls einzuführen.

T19. Betrachten Sie ein klassisches ideales Gas in einem Behälter mit Volumen V.

(a) Der Behälter wird in Kontakt mit einem Wärmebad gebracht. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme, und daraus das chemische Potential über seine Definition

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T}$$

mit der freien Energie F. Wie verhält sich μ als Funktion von T? (Hinweis: Stirling-Formel)

(b) Der Behälter werde nun auch noch in Kontakt mit einem Teilchenreservoir (chemisches Potential μ) gebraucht. Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme, und daraus den Erwartungswert für die Teilchenzahl $\langle N \rangle$.

(c) Zeigen Sie, dass im Limes großer Teilchenzahlen die kanonische und großkanonische Beziehung zwischen μ und N kompatibel sind.

T20. Betrachten Sie einen eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator.

(a) Geben Sie für drei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen (Fermionen) die ersten drei niedrigsten Energieniveaus und ihre Entartung an;

(b) Geben Sie für drei Spin-0 Teilchen (Bosonen) die ersten drei niedrigsten Energieniveaus und ihre jeweilige Entartung an;

Ein Einteilchenzustand des Oszillators sei durch einen Dichteoperator der Form

$$\rho = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |n\rangle \langle n|$$

(mit Normierungskonstante c) beschrieben. Hierbei seien die $|n\rangle$ die Eigenzustände des Harmonischen Oszillators mit $H|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.

(c) Handelt es sich um einen reinen oder einen gemischten Zustand? Bestimmen Sie die Normierungskonstante c;

(d) Berechnen Sie die Energie des Systems;

Zu kreuzen: 18ab [2 Punkte], 18c, 19a, 19b, 19c, 20a, 20b, 20c, 20d