Gerhard Kahl & Florian Libisch

STATISTISCHE PHYSIK 1 (VU – 136.020)

9. Tutoriumstermin (17.6.2016)

T27. Betrachten Sie ein ideales Fermigas in einem kugelförmigen Behälter mit Radius R.

(a) Berechnen Sie den Druck des Fermigases im limes kleiner T. drücken Sie Ihr Ergebnis mittels des Erwartungswertes der Teilchenzahl $\langle N \rangle_g$ aus. Welches Prinzip liegt dem Druck des Fermigases zugrunde?

(b) Berechnen Sie die mittlere kinetische Energie des Fermigases als Funktion des Behälterradius R.

(c) Berechnen Sie klassisch die Gravitationsenergie eines Sternes konstanter Dichte als Funktion seines Radius unter der Annahme, dass der Stern kugelförmig ist.

(d) In einem Neutronenstern werden durch die hohe Gravitation die Elektronen in die Atomkerne gedrückt, bis eine Kugel aus hochkomprimierten Neutronen entsteht. Schätzen Sie mit Hilfe Ihrer obigen Resultate den Radius eines Neutronensterns als Funktion seiner Masse ab. Was ergibt sich in etwa für eine Sonnenmasse?

T28. N nicht-wechselwirkende Momente der Stärke μ_m befinden sich in einem homogenen Magnetfeld H, welches parallel zur z-Achse wirkt. Die Momente können die Einstellungen $s_z = s, s-1, \ldots, -s$ einnehmen.

Die Hamiltonfunktion ist gegeben durch

$$\mathcal{H}(\{(s_z)_i\}) = -\mu_m H \sum_{i=1}^{N} (s_z)_i$$

(a) Zeigen Sie, daß die kanonische Zustandssumme Z_k durch

$$Z_k = \left[\frac{\sinh\left[x(s+1/2)\right]}{\sinh(x/2)} \right]^N$$

gegeben ist, wobei $x = \mu_m H/(k_\mathrm{B} T)$.

Hinweis: Verwenden Sie: $\sinh(a) = [\exp(a) - \exp(-a)]/2$.

(b) Berechnen Sie die freie Energie $F(T,H)$ und die Magnetisierung $M(T,H) = -(\partial F/\partial H)_T$ als Funktion der Temperatur T und des Magnetfelds H.

Hinweis: $\coth(a) = \cosh(a)/\sinh(a)$

(c) Zeigen Sie, daß M für tiefe Temperaturen T, d.h. für $T \ll \mu_m H/k_\mathrm{B}$, gegen den Sättigungswert $N\mu_m s$ strebt.

Hinweis: $\lim_{a\to\infty} \coth(a) = 1$

(d) Zeigen Sie, daß für hohe Temperaturen, d.h. für $T \gg \mu_m H/k_{\mathrm{B}}$ das Curie-Gesetz gilt, d.h. daß für die magnetische Suszeptibilität χ_m folgende Relation gilt:

$$\chi_m = \frac{\text{const}}{T}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Taylorentwicklung $\coth(a) = 1/a + a/3 + \mathcal{O}(a^3)$ für kleine a.

T29. Gegeben ist ein System von N nicht-wechselwirkenden Momenten in einem externen Magnetfeld H; jedes dieser magnetischen Momente kann zwei Einstellungen haben ($s_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, N$).

Die Hamiltonfunktion ist durch

$$\mathcal{H}(\{s_i\}) = -\epsilon \sum_{i=1}^{N} s_i$$

gegeben.

(a) Betrachten Sie das System im *mikrokanonischen* Ensemble und berechnen Sie bei vorgegebener Energie E und externem Feld H die Entropie $S = S(E, H)$ sowie die Temperatur T. Berechnen Sie für dieses System die kalorsiche Zustandsgleichung $E = E(T)$.

(b) Betrachten Sie das System im *kanonischen* Ensemble und berechnen Sie bei vorgegebener Temperatur T und externem Feld H die freie Energie $F = F(T, H)$; ermitteln Sie in einem weiteren Schritt daraus die Entropie S und die (mittlere) Energie $\bar{E}$.

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse für E (bzw. $\bar{E}$), die Sie in den beiden Ensembles erhalten haben.

Hinweis: es ist ratsam, anstelle der externen thermodynamischen Größen die jeweils intensiven Größen zu verwenden (also, z.B. $E \to e = E/N$, etc.).

Zu kreuzen: 27a, 27b, 27c, 27d, 28a, 28b, 28c, 28d, 29a, 29bc