Gerhard Kahl & Florian Libisch

# STATISTISCHE PHYSIK 1 (VU – 136.020)

## 4. Tutoriumstermin (29.4.2016)

### T12. EINSTEIN MODELL

#### a). Hamilton Funktion und Phasenraum

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \mathbf{x}_i^2}{2} \tag{1}$$

$$\Gamma = \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}, \quad \text{oder auch} \quad \mathbb{R}^{3N} \times V_{\text{Festkörper}} \tag{2}$$

#### b). mikrokanonische Entropie

$$\mathcal{S} := k_\mathrm{B} \ln \Omega, \tag{3}$$

$$\Omega := \frac{1}{h^{3N}} \int_{\Gamma, \mathcal{H}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i) \in [E-\Delta, E]} \mathrm{d}\mathbf{p}^N \, \mathrm{d}\mathbf{q}^N \tag{4}$$

Substitution:

$$\tilde{\mathbf{p}}_i := \mathbf{p}_i, \qquad \tilde{\mathbf{p}}_{i+N} := m\omega \mathbf{x}_i \tag{5}$$

Somit ist

$$\mathcal{H}(\tilde{\mathbf{p}}_i) = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\tilde{\mathbf{p}}_i^2}{2m} \tag{6}$$

und die Integration nun einfach.

$$\Omega = \frac{1}{h^{3N} N!} \frac{1}{(m\omega)^{3N}} \int_{\mathcal{H} \leq E} \mathrm{d}\tilde{\mathbf{p}}_1 \ldots \mathrm{d}\tilde{\mathbf{p}}_{2N} = \frac{1}{h^{3N} N!} \frac{1}{(m\omega)^{3N}} \cdot \frac{(2mE)^{3N}}{6N} \cdot \frac{2\pi^{3N}}{\Gamma(3N)} \tag{7}$$

und damit die Entropie

$$S = k_\mathrm{B} \ln \Omega \tag{8}$$

$$\approx N k_\mathrm{B} (3 \ln E + \ldots), \tag{9}$$

#### c). kalorische Zustandsgleichung

$$\left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_V = \frac{1}{T} = 3 N k_\mathrm{B} \frac{1}{E} \tag{10}$$

$$E = 3 N k_\mathrm{B} T \tag{11}$$

**Dulong-Petit-Gesetz**

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \stackrel{\rightarrow}{=} 3Nk_{\mathrm{B}} \stackrel{\rightarrow}{=} 3R \tag{12}$$

Das Resultat ist insbesondere unabhängig von $\omega$!

## T13. 1-DIMENSIONALES GAS

### a). Berechne die kanonische Zustandssumme:

$$Z_k = \frac{1}{N!}\frac{1}{h^{ND}}\int_\Gamma d\mathbf{q}^N d\mathbf{p}^N \exp\left[-\beta\mathcal{H}(\mathbf{q}^N,\mathbf{p}^N)\right] = \frac{V^N}{N! h^{ND}}\left(\frac{2}{\beta a}\right)^N \tag{13}$$

### b). Berechne die thermische Zustandsgleichung:

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial}{\partial V}\left(-k_B T \ln Z_k\right)\right)_T = \frac{Nk_BT}{V} \tag{14}$$

### c). Berechne die kalorische Zustandsgleichung:

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_k = -\frac{1}{Z_k}\frac{\partial Z_k}{\partial \beta} = Nk_BT \tag{15}$$

## T14. IDEALES GAS IM SCHWEREFELD

### a). Die kanonische Zustandssumme

Im Folgenden definieren wir der Übersichtlichkeit wegen $c = \frac{1}{N!}\frac{1}{h^{3N}}$ der Phasenraum ist gegeben durch $\Gamma = \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{+,N} \times (\{0,L\})^{2N}$,

$$c\int_\Gamma d^N\mathbf{p}d^N\mathbf{q}e^{-\beta\mathcal{H}(\mathbf{q}^N,\mathbf{p}^N)} = c\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{3N}} d^N\mathbf{p}\prod_{i=1}^N e^{-\beta\mathbf{p}_i^2/2m}}_{I_{\mathcal{H}_0}} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{+,N}\times(\{0,L\})^{2N}} d^N\mathbf{q}\prod_{i=1}^N e^{-\beta q_{z,i}mg}}_{I_V}. \tag{16}$$

Die Terme $I_V$ und $I_{\mathcal{H}_0}$ werden getrennt gelöst.

$$\prod_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}e^{-\beta\mathbf{p}_i^2/2m} = \prod_{i=1}^{3N}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p^2/2m}dp = \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3N/2} \tag{17}$$

Nun betrachten wir noch den Term $I_V$,

$$I_V = \int_{\mathbb{R}^{+,N}\times(\{0,L\})^{2N}} d^N\mathbf{q}\prod_{i=1}^N e^{-\beta q_{z,i}mg} = L^{2N}\prod_{i=1}^N\int_0^\infty e^{-\beta mgz}dz = \left(\frac{L^2}{mg\beta}\right)^N. \tag{18}$$

Damit ergibt sich für die Zustandssumme

$$Z_k = cI_{\mathcal{H}_0}I_V = \left(\frac{L^2}{mg\beta}\right)^N \frac{1}{N!\Lambda^{3N}}. \tag{19}$$

### b). Mittelwert der kinetischen Energie

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{c}{Z_k} \int_\Gamma \mathcal{H}_0(\mathbf{p}^N) e^{-\beta \mathcal{H}(\mathbf{q}^N, \mathbf{p}^N)} d^N \mathbf{q} d^N \mathbf{p} \tag{20}$$

Die auftretenden Integrale haben wir bereits gelöst und finden damit

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{3N}{2} k_b T. \tag{21}$$

### c). Mittelwert der potentiellen Energie

Durch äquivalente Überlegungen wie in Unterpunkt b.) finden wir

$$\langle V \rangle = \frac{c}{Z_k} \int_\Gamma (\mathbf{p}^N) e^{-\beta \mathcal{H}(\mathbf{q}^N, \mathbf{p}^N)} d^N \mathbf{q} d^N \mathbf{p} \tag{22}$$

und

$$\langle V \rangle = N k_b T. \tag{23}$$