

---

Gerhard Kahl & Florian Libisch  
**STATISTISCHE PHYSIK 1 (VU – 136.020)**  
**1. Tutoriumstermin (3.6.2016)**

---

**T24. IDEALES BOSE-GAS IN 2 DIM**

**a). Teilchenzahl und Energie**

Die Zustandsdichte für 2 Dimensionen ist:

$$\mathcal{D}(\epsilon) = \frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \quad (1)$$

Damit ergibt sich für die Teilchenzahlen

$$\langle N \rangle = g \int_0^\infty d\epsilon \mathcal{D}(\epsilon) f_{BE}(\epsilon) = \frac{gmL^2}{2\pi\hbar^2\beta} \Gamma(1)g_1(z) + g \frac{z}{1-z} = N' + N_0 \quad (2)$$

Für die Energie ergibt sich damit

$$\langle E \rangle = g \int_0^\infty d\epsilon \epsilon \mathcal{D}(\epsilon) f_{BE}(\epsilon) = g \frac{mL^2}{2\pi\hbar^2\beta^2} \Gamma(2)g_2(z) \quad (3)$$

**b). Limes großer Temperaturen**

Im Grenzfall hoher Temperatur ist  $z \ll 1$  und  $g_\nu$  kann durch die Reihenentwicklung angenähert werden:

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \frac{gmL^2 k_B T}{2\pi\hbar^2} g_1(z) = \frac{gmL^2 k_B T}{2\pi\hbar^2} \left( z + \frac{z^2}{2} + \dots \right) \\ \rightarrow z &= \frac{2\pi\hbar^2}{gmL^2 k_B T} \langle N \rangle - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{gmL^2 k_B T} \langle N \rangle \right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Für  $J$  erhält man über  $\tilde{\mathcal{D}}(\epsilon) = \epsilon \mathcal{D}(\epsilon)$

$$\begin{aligned} J &= g \int_0^\infty d\epsilon \epsilon \tilde{\mathcal{D}}(\epsilon) f_{BE}(\epsilon) = -g \frac{mL^2}{2\pi\hbar^2\beta^2} \Gamma(2)g_2(z) = -g \frac{mL^2}{2\pi\hbar^2\beta^2} \left( z + \frac{z^2}{4} + \dots \right) = -PV \\ \rightarrow PV &= k_B T \langle N \rangle - \frac{1}{4} \frac{2\pi\hbar^2}{gmL^2} \langle N \rangle^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Der zweite Term stellt eine quantenmechanische Korrektur zur allgemeinen Gasgleichung dar. Das Volumen ist im zweidimensionalen Fall  $V = L^2$ . Für die kalorische Zustandsgleichung vergleicht man (7) und (9) und erhält  $\langle E \rangle = PV$  und damit

$$\langle E \rangle = k_B T \langle N \rangle - \frac{1}{4} \frac{2\pi\hbar^2}{gmL^2} \langle N \rangle^2. \quad (6)$$

**c). Limes tiefer Temperaturen**

Im Niedertemperaturlimites ist das Verhalten von  $N'$  zu betrachten: Die Reihenentwicklung von  $g_1(z)$  lautet

$$g_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \quad (7)$$

was im Limes  $z \rightarrow 1$  nicht beschränkt ist. Die angeregten Zustände können also in jedem Fall alle Teilchen aufnehmen und es gibt keine Bose-Einstein-Kondensation. (Alternativ könnte man auch  $g_1(z)$  analytisch integrieren:  $g_1(z) = \ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$  und daraus den Grenzwert ablesen.)

## T25. ULTRARELATIVISTISCHES BOSEGAS

### a). Grosses Potential

Mit der Dispersionsrelation

$$\epsilon(\mathbf{p}) \approx cp = c\hbar k. \quad (8)$$

ergibt sich folgende Zustandsdichte

$$\mathcal{D}(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2 (\hbar c)^3} \epsilon^2, \quad (9)$$

sowie

$$\hat{\mathcal{D}}(\epsilon) = \frac{1}{3} \epsilon \mathcal{D}(\epsilon) \quad (10)$$

Durch die Berechnung der Zustandsdichte berechnet sich das große Potential:

$$J = - \int \hat{\mathcal{D}}(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon + k_B T \ln(1 - e^{\beta\mu}) = -\frac{1}{3} \frac{V}{2\pi^2 (\hbar c)^3} \int \frac{\epsilon^3}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}} d\epsilon + k_B T \ln(1 - z) \quad (11)$$

mit der Substitution  $x = \beta\epsilon$  folgt

$$J = -\frac{2}{\beta^4} \frac{V}{2\pi^2 (\hbar c)^3} g_4(z) + k_B T \ln(1 - z) \quad (12)$$

### b). N, P, E

Der Formalismus der Zustandsdichten erlaubt weiters die einfache berechnung von  $N, P, V$ .

$$N = \int D(\epsilon) f_{BE}(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{\beta^3} \frac{V}{2\pi^2 (\hbar c)^3} g_3(z) + \frac{1}{z^{-1} - 1} \quad (13)$$

Wobei wir wieder  $x = \beta\epsilon$  verwendet haben.

$$PV = -J, \quad E = 3PV \quad (14)$$

### c). große T

Für kleine Temperaturen können wir die Reihenentwicklung für kleine  $z$  verwenden.

$$\frac{N}{V} = \frac{2}{\beta^3} \frac{1}{2\pi^2 (\hbar c)^3} \left( z + \frac{z^2}{2^3} \right) \quad (15)$$

Diese Gleichung kann iterativ gelöst werden Sammelt man alle Terme zusammen so erhält man

$$PV \approx \frac{2}{\beta^4} \frac{V}{2\pi^2 (\hbar c)^3} \left( z + \frac{z^2}{2^4} \right) = N k_B T - \frac{2\pi^2 (c\hbar)^3 N^2}{32 k_B^2 T^2 V} \quad (16)$$

d). kleine T

Für kleine Temperaturen kann die Besetzung des Grundzustandes nicht mehr vernachlässigt werden und es gilt  $z \rightarrow 1$ .

$$N = \frac{2}{\beta^3} \frac{V}{2\pi^2 (\hbar c)^3} g_3(z) + \frac{1}{z^{-1} - 1}, \quad (17)$$

wobei der erste Term die Besetzung der angeregten und der zweite Term die Besetzung des Grundzustandes repräsentieren. Also

$$N_0 = \frac{1}{z^{-1} - 1}, \quad N' = \frac{2}{\beta^3} \frac{V}{2\pi^2 (\hbar c)^3} g_3(z) \quad (18)$$

Daraus folgt:

$$N_0 = N - N' \quad (19)$$

Der Übergang zum Kondensat erfolgt genau dann wenn der gesamte Beitrag zu  $N$  gerade noch von  $N'$  getragen werden kann (mit  $\rho = \frac{N}{V}$ )

$$g_3(1) = \rho \beta^3 \pi^2 (c\hbar)^3 \quad (20)$$

Die kritische Temperatur ist somit

$$T_c = (\rho \pi^2)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar c}{k_B \sqrt[3]{g_3(1)}} \quad (21)$$

und die kritische Dichte

$$\rho_c = \frac{g_3(1)}{\beta^3 \pi^2 (c\hbar)^3} \quad (22)$$

**T26. GAS ULTRARELATIVISTISCHER FERMIONEN:**

a). **Zustandsdichte für  $\epsilon(\mathbf{k}) = c|\mathbf{p}| = c\hbar|\mathbf{k}|$ :**

$$D(\epsilon) = (2s+1) \frac{L^3}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{(c\hbar)^3} \epsilon^2 := c' \epsilon^2 \quad (23)$$

b). **Zustandsgleichung:**

Wenn man nun  $\tilde{D}(\epsilon) = \int^\epsilon d\epsilon' D(\epsilon') = c' \epsilon^3 / 3 = \frac{1}{3} \epsilon D(\epsilon)$  folgt

$$\langle E \rangle = \int d\epsilon \epsilon D(\epsilon) f_{FD}(\epsilon) = 3pV \quad (24)$$

c). **Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials  $\mu(T)$**

Das chemische Potential wird durch das "filling" des Systems bestimmt. Die Anzahl der Fermionen im System soll also einen fixen Wert haben, der sich nicht mit der Temperatur ändert. Insbesondere gilt:  $\langle N \rangle_{(T=0)} = \langle N \rangle_{(T)}$

$$\langle N \rangle_{(T)} = \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon) f_{FD}(\epsilon, \mu) \quad (25)$$

empfehl es sich die Sommerfeld-Entwicklung zu verwenden,

$$\langle N \rangle_{(T)} = c' \frac{\mu^3}{3} + \frac{1}{2} (k_B T)^2 2c' \mu \frac{\pi^2}{3} + \mathcal{O}((k_B T/E_F)^4) \quad (26)$$

Setzt man  $N(T=0) = N(T)$  und beachtet  $\mu(T=0) = \epsilon_F$  so ergibt sich

$$\epsilon_F^3 = \mu^3 + \pi^2 (k_B T)^2 \mu + \mathcal{O}((k_B T/E_F)^4) \quad (27)$$

Diese Gleichung lässt sich approximativ nach  $\mu$  auf lösen,

$$\mu = \epsilon_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 \right) \quad (28)$$

**d). Temperaturabhängigkeit des Energieerwartungswertes  $\langle E \rangle (T)$**

Anwendung der Sommerfeldentwicklung gibt

$$\langle E \rangle = c' \frac{\mu^4}{4} + \frac{1}{2} (k_B T)^2 c' 3\mu^2 \frac{\pi^2}{3} + \mathcal{O}((T/T_F)^4) \quad (29)$$

Und nach einsetzen der chemischen Potentials (Gleichung (28)) ergibt sich:

$$\langle E \rangle = \frac{2s+1}{2} \frac{L^3}{\pi^2 (\hbar c)^3} \epsilon_F^4 \left( \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{6} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O}((T/T_F)^4) \right) \quad (30)$$

$$(31)$$

**e). Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität  $c_V(T)$**

$$C_V = \left( \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \right)_{V,S} = \frac{2s+1}{2} k_B \frac{L^3}{(\hbar c)^3} \epsilon_F^3 \frac{1}{3} \frac{T}{T_F} + \mathcal{O}((T/T_F)^3) \quad (32)$$

Man findet daher auch für ultrarelativistische Fermionen einen linearen Zusammenhang zwischen der Wärmekapazität und der Temperatur.