Gerhard Kahl & Florian Libisch

STATISTISCHE PHYSIK 1 (VU – 136.020)

9. Tutoriumstermin (17.6.2016)

T27. NEUTRONENSTERN

a). Druck des Fermigases im Limes kleiner Temperaturen

$$J = -PV = -g \int_0^\infty d\epsilon \hat{D}(\epsilon) f_{FD}(\epsilon) \tag{1}$$

mit

$$\hat{D}(\epsilon) = \int_0^\epsilon d\epsilon D(\epsilon) \tag{2}$$

Für ein ideales Fermigas in 3 Dimensionen erhalten wir:

$$D(\epsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \epsilon^{1/2} := C\sqrt{\epsilon}, \tag{3}$$

$$PV = g \int_0^\infty d\epsilon \; \hat{D}(\epsilon) f_{FD}(\epsilon) \xrightarrow[\lim T \to 0]{} g \int_0^\infty d\epsilon \; C \frac{2}{3} \epsilon^{3/2} \theta(\epsilon - \epsilon_F) = \frac{g {\epsilon_F}^{5/2} (2m)^{3/2}}{15\pi^2 \hbar^3} V \tag{4}$$

$$\langle N \rangle_g = g \; C \frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2} \tag{5}$$

$$\Rightarrow PV = g \; C \frac{4}{15} \epsilon_F^{5/2} = \frac{2}{5} \epsilon_F \left(g \; C \frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2} \right) = \frac{2}{5} \epsilon_F \langle N \rangle_g \tag{6}$$

b). Mittlere kinetische Energie $\langle E|E \rangle_g$

$$\langle E \rangle_g = g \int_0^\infty d\epsilon \; \epsilon D(\epsilon) f_{FD}(\epsilon) \xrightarrow[\lim T \to 0]{} g \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \; \epsilon D(\epsilon) = g \frac{2}{5} \epsilon_F^{5/2} C = g \frac{2}{5} \epsilon_F^{5/2} \frac{V}{4\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \tag{7}$$

c). Gravitationsenergie kugelförmiger Sterns konstanter Dichte

Man kann die Gravitationsenergie eines kugelförmiger Sterns berechnen , indem man sukzessiv infinitesimale Kugelschalen der Masse $dm = 4\pi r^2 dr \rho_m$ ins Unendliche verschiebt und die dafür benötigte Arbeit berechnet.

$$dE_{pot} = -\int_r^\infty \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_m \cdot 4\pi r^2 dr \rho_m \cdot G \frac{1}{r'^2} dr' = -\frac{16}{3} \pi^2 r^4 \rho_m^2 G dr \tag{8}$$

$$E_{pot} = \int_0^R dE_{pot}(r) = -\frac{16}{15} \pi^2 \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{-2} \frac{N^2 M_N^2}{R} G \tag{9}$$

Im letzten Schritten wurde die Massendichte ρ_m über $\rho_m = \frac{N M_N}{V}$ ausgedrückt.

d). Radius des Neutronensterns

Wenn man den Neutronenstern bei kleinen Temperaturen komprimiert, setzt sich dem nach innen wirkenden Gravitationsdruck schließlich der Fermidruck entgegen.

$$p_{\text{Grav}} = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial V} = -\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3}\frac{1}{5}G(M_N N)^2 V^{-4/3}, \qquad p_{\text{Fermi}}V = \frac{2}{5}N\epsilon_F, \tag{10}$$

wobei ϵ_F über $n = N/V$ und M_N ausgedrückt werden kann.

$$N = \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon)d\epsilon = \frac{V}{4\pi^2}\frac{(2M_N)^{3/2}}{\hbar^3}\frac{2}{3}\epsilon_F^{3/2} \quad \Rightarrow \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2M_N}(3\pi^2 n)^{1/3} \tag{11}$$

$$p_{\text{Fermi}} + p_{\text{Grav}} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{2}{5}\frac{N}{V}\frac{\hbar^2}{2M_N}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3} = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3}\frac{1}{5}G(M_N N)^2 V^{-4/3} \tag{13}$$

mit $V = 4/3\pi R^3$ erhält man schließlich:

$$R = \frac{\hbar^2}{GM_N^3}\frac{1}{N^{1/3}}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{GM_N^{8/3}}\underbrace{\frac{1}{(M_N N)^{1/3}}}_{=M^{1/3}}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \tag{14}$$

Für die Sonnenmasse ($M = 1.98 \cdot 10^{30}$ kg) erhalten wir:

$$R \sim 12.4\ km \tag{15}$$

T28. N NICHT WECHSELWIRKENDE MOMENTE

a). Zustandssumme

Der Hamiltonoperator sieht folgendermaßen aus:

$$\mathcal{H} = -\mu_m H \sum_{i=1}^{N}(s_z)_i$$

Es kommen also keine Wechselwirkungsterme vor. Um die Zustandssumme zu berechnen ist es zweckmäßig zuerst die Zustandssumme für ein Teilchen zu berechnen

$$Z_1 = \sum_{s_z=-s}^{s} e^{\beta\mu_m H s_z} = \frac{e^{xs}e^{\frac{x}{2}} - e^{-xs}e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}$$

mit der Abkürzung $x = \beta\mu_m H$. Dadurch ergibt sich

$$Z_k = Z_1^N = \left[\frac{\sinh x(s+1/2)}{\sinh\frac{x}{2}}\right]^N$$

b). freie Energie und Magnetisierung

$$F(T,H) = -k_B T \ln Z_k = -N k_B T \ln \left[\frac{\sinh x(s+1/2)}{\sinh \frac{x}{2}} \right]$$

$$M(T,H) = \Big(-\frac{\partial F}{\partial H} \Big)_T = N\mu_m \big[(s+1/2) \coth x(s+1/2) - \frac{1}{2} \coth \frac{x}{2} \big]$$

c). tiefe Temperaturen

Für tiefe Temperaturen $T \ll \mu_m H/k_B$, also $x \gg 1$ geht $\coth(x)$ gegen 1. Somit ergibt sich für die Magnetisierung:

$$M = N\mu_m \Big[(s+1/2)1 - \frac{1}{2} 1 \Big] = N\mu_m s$$

d). hohe Temperaturen

Für hohe Temperaturen gilt $x \ll 1$ und $\coth(x)$ kann entwickelt werden. $\coth(x) \sim \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$

$$M = N\mu_m^2 \beta H \Big[\frac{(s+1/2)^2}{3} - \frac{1}{12} \Big]$$

Daraus folgt dass die Suszeptibilität folgendermaßen gegeben ist:

$$\chi_m = N\mu_m^2 \beta \Big[\frac{(s+1/2)^2}{3} - \frac{1}{12} \Big] = \frac{const}{T}$$

T29. N MOMENTE IM MAGNETFELD

Nachfolgend betrachten wir magnetische, nicht wechselwirkenden Momente in einem externen Magnetfeld H. Die Dynamik des Systems wird durch folgenden Hamiltonian beschrieben

$$\mathcal{H}(\{s_i\}) = -\epsilon \sum_{i=1}^{N} s_i, \tag{16}$$

wobei die Momente folgende Einstellungsmöglichkeiten besitzen $s_i \in \{-1, 1\}$.

a). mikrokanonisches Ensemble

Die Energieeinschränkung ergibt

$$E = (N-n)\epsilon - n\epsilon. \tag{17}$$

Hieraus ergibt sich durch umformen

$$n = \frac{N\epsilon - E}{2\epsilon}, \tag{18}$$

dies werden wir bei der Berechnung bei der Entropie benötigen. Die Entropie im mikrokanonischen Ensemble ist gegeben durch

$$S = k_B \ln \Omega(E), \tag{19}$$

wobei $\Omega(E)$ die Anzahl der Realisierungsmöglichkeiten ist. Im Prinzip gibt es für N Momente $N!$ Möglichkeiten der Anordnung, jedoch gibt es einerseits $n!$ und $(N-n)!$ Möglichkeiten der Umordnung der Momente untereinander, welche nicht unterschieden werden können. Unter Beachtung dieser Vertauschungen erhält man

$$\Omega(E) = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N!}{\left(\frac{N\epsilon - E}{2\epsilon}\right)! \left(\frac{N\epsilon + E}{2\epsilon}\right)!}. \tag{20}$$

Einsetzen von Gleichung (20) in Gleichung (19) und verwenden der *Sterling* Approximation $\ln N! \approx N \ln N - N$ ergibt

$$S = k_B \left[N \ln N - \frac{N\epsilon - E}{2\epsilon} \ln\left(\frac{N\epsilon - E}{2\epsilon}\right) - \frac{N\epsilon + E}{2\epsilon} \ln\left(\frac{N\epsilon + E}{2\epsilon}\right) \right]. \tag{21}$$

Nun berechnen wir die Temperatur

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} = \frac{k_B}{2\epsilon} \ln\left(\frac{N\epsilon - E}{N\epsilon + E}\right). \tag{22}$$

Für die Temperaturabhängigkeit der Energie E lösen wir die vorhergehende Gleichung nach E auf

$$\varepsilon = -\epsilon \tanh\left(\frac{\epsilon}{k_B T}\right). \tag{23}$$

b). kanonisches Ensemble

Die Berechnung im kanonischen Ensemble ist insofern einfacher, da die lästige Energieeinschränkung wegfällt. Die Zustandssumme berechnet sich aus

$$Z_K = \sum_{\{s_x\}_{x\in\Lambda}} e^{-\beta\mathcal{H}\{s_x\}} = 2^N \left(\cosh\left(\beta\epsilon\right)\right)^N. \tag{24}$$

Die freie Energie F berechnet sich aus

$$F = -k_B T \ln Z_K \tag{25}$$

und hieraus lässt sich die Entropie S bestimmen

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -\frac{F}{T} + \beta k_B \epsilon \tanh\left(\beta\epsilon\right). \tag{26}$$

Die Berechnung der mittleren Energie ergibt

$$\bar{E} = \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_K = -N\epsilon \tanh\left(\beta\epsilon\right)$$

umschreiben auf intensive Größen ergibt

$$\varepsilon = -\epsilon \tanh\left(\frac{\epsilon}{k_B T}\right). \tag{27}$$

c). Vergleich der Ergebnisse

Durch Vergleich von Gleichung (23) und Gleichung (27) sieht man sofort die Übereinstimmung.