Lösung der Aufgabe 16, Tutorium 5

16. Zwei-Moden-Verschränkung

Gegeben sei ein System aus zwei harmonischen Oszillatoren mit jeweiligen Basiszuständen $|n\rangle_A$ und $|n\rangle_B$. Der Dichteoperator des Gesamtsystems sei

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \qquad |\Psi\rangle = \sqrt{1-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{\frac{n}{2}}\, |n\rangle_A \otimes |n\rangle_B, \qquad 0 < \lambda < 1. \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie den reduzierten Dichteoperator $\hat{\rho}_A$ des Subsystems A, sowie die Entropie von $\hat{\rho}$ und von $\hat{\rho}_A$.
Da $\hat{\rho}$ ein reiner Zustand ist, gilt $S[\hat{\rho}] = 0$. Um den reduzierten Dichteoperator $\hat{\rho}_A$ zu berechnen schreiben wir

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = (1-\lambda) \sum_{n,m=0}^{\infty} \lambda^{\frac{n+m}{2}} |n\rangle_A\langle m| \otimes |n\rangle_B\langle m| \tag{2}$$

und daher

$$\hat{\rho}_A = \mathrm{Sp}_B\{\hat{\rho}\} = (1-\lambda)\sum_{n,m} \lambda^{\frac{n+m}{2}} \mathrm{Sp}_B\{|n\rangle_A\langle m| \otimes |n\rangle_B\langle m|\} = (1-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n |n\rangle_A\langle n|. \tag{3}$$

Damit erhalten wir für die Entropie

$$\begin{aligned} S[\hat{\rho}_A]/k_B &= -\mathrm{Sp}\{\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A\} = -(1-\lambda)\sum_n \lambda^n \left[n \ln\lambda + \ln(1-\lambda)\right] \\ &= -\ln(1-\lambda) - \frac{\lambda \ln\lambda}{(1-\lambda)} \end{aligned} \tag{4}$$

wobei die folgenden Summen benutzt wurden

$$\sum_n \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}, \qquad \sum_n n\lambda^n = \lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sum_n \lambda^n\right] = \lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{1-\lambda}\right] = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}. \tag{5}$$

(b) Bestimmen Sie die Varianz $\langle\hat{q}_A^2\rangle = \langle\hat{q}_B^2\rangle$ und die Korrelation $\langle\hat{q}_A\hat{q}_B\rangle \equiv \mathrm{Sp}\{\hat{q}_A\hat{q}_B\hat{\rho}\}$, wobei $\hat{q}_j = (\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger)/\sqrt{2}$, $j = A, B$, und $\hat{a}_j$, $\hat{a}_j^\dagger$ sind die Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperator für den Oszillator $j = A, B$. Zeigen Sie damit, dass für diesen 2-Moden-verschränkten Zustand die Unschärfe des relativen Abstands, $\Delta\hat{q} = \hat{q}_A - \hat{q}_B$, sehr viel kleiner sein kann als die Unschärfe der absoluten Position jedes einzelnen Oscillators, d.h. $\langle(\hat{q}_A - \hat{q}_B)^2\rangle < \langle\hat{q}_A^2\rangle$.
Da $\hat{\rho}_A$ diagonal in der Energiebasis ist und $\langle n|\hat{a}_i|n\rangle = \langle n|\hat{a}_i^\dagger|n\rangle = 0$, folgt $\langle\hat{q}_A\rangle = 0$ und $\mathrm{Var}(\hat{q}_A) =$

$\langle\hat{q}_A^2\rangle - \langle\hat{q}_A\rangle^2 = \langle\hat{q}_A^2\rangle$. Für diesen Erwartungswert erhalten wir nach Einsetzen der Diagonaldarstellung von $\hat{\rho}_A$

$$\begin{aligned}\langle\hat{q}_A^2\rangle &= \frac{1-\lambda}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\langle n|2\hat{a}_A^\dagger\hat{a}_A + 1 + \hat{a}_A^2 + (\hat{a}_A^\dagger)^2|n\rangle \\ &= \frac{1-\lambda}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(2n+1) = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{1-\lambda}.\end{aligned}$$

Für die Korrelationen zwischen den Moden A und B erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle\hat{q}_A\hat{q}_B\rangle = \langle\Psi|\hat{q}_A\hat{q}_B|\Psi\rangle &= (1-\lambda)\sum_{n,m=0}^{\infty}\lambda^{\frac{n+m}{2}}\mathrm{Sp}\{\hat{q}_A\hat{q}_B|n\rangle_A\langle m|\otimes|n\rangle_B\langle m|\} \qquad (6)\\ &= (1-\lambda)\sum_{n,m=0}^{\infty}\lambda^{\frac{n+m}{2}}\langle m_A|\langle m_B|\hat{q}_A\hat{q}_B|n_A\rangle|n_B\rangle \qquad (7)\\ &= \frac{(1-\lambda)}{2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\lambda^{\frac{n+m}{2}}\langle m_A|\langle m_B|(\hat{a}_A^\dagger + \hat{a}_A)(\hat{a}_B^\dagger + \hat{a}_B)|n_A\rangle|n_B\rangle.\end{aligned}$$

Für das Matrixelement tragen nur die Kombinationen $\hat{a}_A^\dagger\hat{a}_B^\dagger$ und $\hat{a}_A\hat{a}_B$ bei,

$$\langle m_A|\langle m_B|\hat{a}_A^\dagger\hat{a}_B^\dagger|n_A\rangle|n_B\rangle = \delta_{m,n+1}(n+1), \qquad \langle m_A|\langle m_B|\hat{a}_A\hat{a}_B|n_A\rangle|n_B\rangle = \delta_{m,n-1}n. \qquad (8)$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}\langle\hat{q}_A\hat{q}_B\rangle &= \frac{1-\lambda}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[n\lambda^{n-1/2} + (n+1)\lambda^{n+1/2}\right] \\ &= \frac{1-\lambda}{2}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{1-\lambda} + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\lambda}\right)\frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}\right] = \frac{\sqrt{\lambda}}{1-\lambda},\end{aligned}$$

und

$$\langle(\hat{q}_A - \hat{q}_B)^2\rangle = 2\left(\langle\hat{q}_A^2\rangle - \langle\hat{q}_A\hat{q}_B\rangle\right) = 1 + \frac{2\lambda}{1-\lambda} - \frac{2\sqrt{\lambda}}{1-\lambda} \leq 1.$$

Für $\lambda = 1-\epsilon$ nahe bei 1 findet man

$$\frac{\langle(\hat{q}_A - \hat{q}_B)^2\rangle}{\langle\hat{q}_A^2\rangle} = \frac{2(1+\lambda-2\sqrt{\lambda})}{1+\lambda} \approx \frac{\epsilon^2}{4} \to 0 \qquad (9)$$