Lösung der Aufgabe 23, Tutorium 7

23. Spin-1/2 Fermionen im magnetischen Feld

Betrachten Sie N nichtwechselwirkenden Fermionen mit Spin $S = 1/2$ im Volumen V. Im Gegensatz zur Vorlesung soll hier die Energieaufspaltung der Spinzustände mit $m_s = \pm 1/2$ in einem äußeren Magnetfeld B berücksichtigt werden. D.h.

$$E_{\vec{k},m_s} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} + 2\mu_B B m_s, \tag{1}$$

wobei μ_B das Bohrsche Magenton bezeichnet. Berechnen Sie für $T = 0$ und unter der Annahme $\mu_B B \ll E_F$ die Magentisierung $M(B) = \mu_B(N_+ - N_-)$, wobei N_+ und N_- die Zahl der Fermionen in den Spinzuständen $m_s = \pm 1/2$ bezeichnen. Verwenden Sie dazu, dass $|N_+ - N_-| \ll N_+ + N_- = N$.

$$\begin{aligned} N_\pm &= \lim_{T\to 0} V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left[\left(\frac{p^2}{2m} \mp \mu_B B - E_F\right)/(k_B T)\right] + 1} = \\ &= \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{\sqrt{2m(E_F \pm \mu_B B)}} dp\, p^2 = \frac{V}{6\pi^2\hbar^3} [2m(E_F \pm \mu_B B)]^{3/2}. \end{aligned}$$

Da das Feld $B \ll E_F/\mu_B$ schwach ist, ergibt die lineare Annäherung

$$N_\pm \approx \frac{V(2mE_F)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3}\left(1 \pm \frac{3\mu_B B}{2E_F}\right), \qquad N = N_+ + N_- \approx \frac{V(2mE_F)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3},$$

und wir bekommen den bekannten, von B unabhängigen Ausdruck für die Fermi Energie

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}.$$

Die Magnetisierung ist

$$M = \frac{\mu_B V}{6\pi^2\hbar^3}\left\{[2m(E_F + \mu_B B)]^{3/2} - [2m(E_F - \mu_B B)]^{3/2}\right\}. \tag{2}$$

In schwachem magnetischem Felde gist es $|N_+ - N_-| \ll N$ und

$$M \approx \frac{\mu_B^2 B V (2mE_F)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3 E_F} = \frac{3\mu_B^2 B N}{2E_F}.$$