Statistische Physik I, SS 2017: Test 1 (28.04.2017)

Name:

Matrikelnummer:

---

1. Prozesse im idealen Gas (14P)

Im Folgenden sollen quasistatische Prozesse in einem idealen klassischen Gas mit fixer Teilchenzahl N betrachtet werden, wobei das Gas ausgehend von einem Zustand (p_1, V_1, T_1) unter der Bedingung

$$pV^x = \text{konst.} \tag{1}$$

in einen neuen Zustand (p_2, V_2, T_2) mit $V_2 < V_1$ übergeführt wird.

(a) Geben Sie die thermische und die kalorische Zustandsgleichung für ein ideales Gas an. (2P)

(b) Welche Prozesse werden durch (i) $x = 0$, (ii) $x = 1$ und (iii) $x = 5/3$ beschrieben? Skizzieren Sie diese Prozesse im (p, V) und im (T, S) Diagramm (Richtung kennzeichnen). (6P)

(c) Berechnen Sie für (i) $x = 0$, (ii) $x = 1$ und (iii) $x = 5/3$ die am System geleistete Arbeit ΔW und die zugeführte Wärme ΔQ als Funktion von $p_{1,2}$ und $V_{1,2}$. Geben Sie jeweils explizit das Vorzeichen von ΔW und ΔQ an. (6P)

2. Response Funktionen (12P)

Die Energie eines Gases sei durch

$$E(S, V, N) = \frac{\beta}{3} \frac{S^3}{NV}, \tag{2}$$

mit einer Konstanten β gegeben.

(a) Welche Einheit hat β? (1P)

(b) Wie lautet die thermische Zustandsgleichung $p(T, V, N)$ für dieses Gas? (3P)

(c) Berechnen Sie die Wärmekapazität C_V. (4P)

(d) Berechnen Sie die adiabatische Kompressibilität κ_S. Drücken Sie das Resultat als Funktion von T, V und N aus. (4P)

3. Harmonische Oszillatoren (16P)

Gegeben Sei ein Gas aus $N \gg 1$ nichtwechselwirkenden Teilchen in einem 3D harmonischen Potential mit Hamiltonfunktion

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m\omega^2 q_i^2. \tag{3}$$

(a) Wie lautet die kanonische Phasenraumdichte für dieses System? Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_{K}. (5P)

(b) Berechnen Sie die freie Energie $F(T, \omega, N)$, die Entropie $S(T, \omega, N)$ und die kalorische Zustandsgleichung $E(T, \omega, N)$. (4P)

(c) Wie lautet die mikrokanonische Phasenraumdichte für dieses System? Berechnen Sie die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E, \omega, N)$. Zeigen Sie, dass die sich daraus ergebende mikrokanonische Entropie mit dem Resultat aus (b) übereinstimmt. (7P)

4. Großkanonisches Ensemble: Herleitung (8P)

(a) Wie lautet die großkanonische Phasenraumdichte $\rho_{\mathrm{G}}(\underline{q}_s, \underline{p}_s; N_s)$ für ein offenes System? (2P)

(b) Zeigen Sie, wie $\rho_{\mathrm{G}}(\underline{q}_s, \underline{p}_s; N_s)$, ausgehend von der mikrokanonischen Phasenraumdichte $\rho_{\mathrm{MK}}(\underline{q}_s, \underline{q}_b, \underline{p}_s, \underline{p}_b)$ für ein isoliertes Gesamtsystem (System plus Bad), abgeleitet werden kann. (6P)

Formelsammlung:

- **Gamma Funktion:**

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty dy\, y^{n-1} e^{-y}, \qquad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

- **Volumen einer d-dimensionalen Kugel:**

$$V_d(R) = \int_{\sum x_i^2 < R^2} d^d x = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} R^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}$$

- **Weitere Integrale:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{2\pi\sigma^2}, \qquad \int_0^\infty dx\, x^n e^{-\alpha x} = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}}$$