

Statistische Physik I (SS 2017): Tutorium 1

1. Stirling Formel

Betrachten Sie die Darstellung der Fakultät $n!$ als Spezialfall der Gamma-Funktion

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx. \quad (1)$$

- (a) Skizzieren Sie den Verlauf des Integranden $f(x) = x^n e^{-x}$ für große n .
(b) Schreiben Sie $f(x) = e^{g(x)}$ und entwickeln Sie den Exponenten $g(x)$ um sein Maximum.
(c) Leiten Sie daraus die Stirling Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (2)$$

für große n her.

- (d) Begründen Sie die weitere Näherung

$$\log(n!) \approx n \log(n) - n \quad (3)$$

anhand eines konkreten Zahlenbeispiels.

2. Vollständige Differentiale

- (a) Welcher der folgenden Ausdrücke ist tatsächlich ein vollständiges Differential (Begründung)?

$$\begin{aligned} df_1 &= \frac{5}{4} T^{\frac{7}{3}} V^{\frac{1}{4}} dV + \frac{7}{3} T^{\frac{4}{3}} V^{\frac{5}{4}} dT \\ df_2 &= \frac{7}{3} T^{\frac{7}{3}} V^{\frac{1}{4}} dV + \frac{5}{4} T^{\frac{4}{3}} V^{\frac{5}{4}} dT \\ df_3 &= T^{\frac{4}{3}} V^{\frac{1}{4}} (dV + dT) \end{aligned}$$

- (b) Wählen Sie ein totales Differential df_i aus Aufgabe 2(a) und bestimmen Sie die Stammfunktion durch direkte Integration entlang eines Pfades \mathcal{C} im (V, T) -Raum. Zeigen Sie explizit die Unabhängigkeit des Ergebnisses für folgenden Integrationspfade:

- \mathcal{C}_1 : gerade Linie zwischen den Punkten (V_1, T_1) und (V_2, T_2) ;
- \mathcal{C}_2 : zwei gerade Linien von (V_1, T_1) nach (V_1, T_2) und von (V_1, T_2) nach (V_2, T_2) .

(V_1, T_1) und (V_2, T_2) bezeichnen dabei immer den Anfangs- und Endpunkt des Integrationspfades.

3. Stirling-Wärmepumpe

Betrachten Sie einen Kreisprozess (Stirling-Zyklus), bei dem ein ideales Gas ausgehend von einem Gleichgewichtszustand mit Temperatur T_1 und Volumen V_1 folgende Schritte durchläuft:

- I) isotherme Kompression (gekoppelt an Wärmebad mit Temperatur T_1)
- II) isochore Abkühlung (bei Volumen V_2) durch Kopplung an Wärmebad mit Temperatur $T_2 < T_1$.
- III) isotherme Expansion (gekoppelt an Wärmebad mit Temperatur T_2)
- IV) isochore Erwärmung durch Kopplung an Wärmebad mit Temperatur T_1

Die Zahl der Atome N im Gas bleibt konstant.

- (a) Skizzieren Sie den Prozess im pV - und im TS -Diagramm und geben Sie (ohne Rechnung) das Vorzeichen der in jedem Schritt am System geleisteten Arbeit ΔW_i , ($i = \text{I,II,III,IV}$) und der in jedem Schritt vom System aufgenommenen Wärmemenge ΔQ_i an.
- (b) Berechnen Sie explizit ΔW_i und ΔQ_i für jeden Prozessschritt als Funktionen von Temperatur und Volumen der jeweiligen Anfangs- und Endzustände. Benutzen Sie dazu die thermische und kalorische Zustandsgleichung.
- (c) Leiten Sie einen Ausdruck für die insgesamt am System geleistete Arbeit W und für die *Heizeffektivität*

$$\eta^H = \frac{-Q_1}{W}, \quad (4)$$

her, wobei Q_1 die vom warmen Reservoir (T_1) ans System übertragene Wärme bezeichnet. Interpretieren Sie η^H . Vergleichen Sie η^H einer Stirling Wärmepumpe, die mit $V_1/V_2 = 10$ zwischen zwei Temperaturen $T_1 = 300$ K and $T_2 = 270$ K arbeitet, mit der direkten Umwandlung von mechanischer oder elektrischer Arbeit in Wärme, $\eta^H = 1$.

Kreuze für: 1(a)-(c), 2(a), 2(b), 3(a), 3(b), 3(c)