Statistische Physik I (SS 2017): Tutorium 2

4. Thermodynamische Potentiale: ideales Gas

Die Entropie eines idealen Gases ist durch

$$S \equiv S(E,V,N) = k_B N \left[\frac{5}{2} + \log\left(\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m E}{3Nh^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right], \tag{1}$$

gegeben (wird in der Vorlesung hergeleitet).

(a) Leiten Sie aus der Entropie den Ausdruck für die Energie $E = E(S,V,N)$ eines idealen Gases her. Zeigen Sie: $E(S,V,N)$ ist extensiv.

(b) Leiten Sie entweder aus der Entropie oder der Energie einen Ausdruck für die Temperatur T ab und bestimmen Sie daraus die kalorische Zustandsgleichung $E(T,N)$.

(c) Leiten Sie einen (kompakten) Ausdruck für die Gibbs-Energie $G = G(T,p,N)$ eines idealen Gases durch Legendre Transformationen aus der Energie her. Welche Information geht bei der kalorischen Zustandsgleichung $E(T,N)$ im Vergleich zur Legendre transformierten Gibbs-Energie verloren? *Hinweis:* Benutzen Sie die thermische Wellenlänge $\lambda_T = \sqrt{h^2/(2\pi m k_B T)}$ zur Vereinfachung der Ausdrücke.

(d) Benützen Sie die Resultate aus (a)-(c) und zeigen Sie explizit, dass die Euler-Relation

$$E = TS - pV + \mu N$$

für ein ideales Gas erfüllt ist.

5. Thermodynamische Potentiale: magnetisches System

Für eine magnetische Probe in einem externen Magnetfeld B ändert sich bei einem reversiblen Prozess die innere Energie U des Systems gemäß

$$dU(S,M,N) = TdS + BdM + \mu dN, \tag{2}$$

wobei M die totale Magnetisierung (extensiv) der Probe und μ das chemische Potential bezeichnet.

(a) Bestimmen daraus analog zur Vorlesung für dieses System die thermodynamischen Potentiale $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(S,B,N)$, $F \equiv F(T,M,N)$ und $G \equiv G(T,B,N)$ und ihre Differenziale.

(b) Für ein paramagnetisches System aus N nicht-wechselwirkenden Spin-1/2 Teilchen erhalten wir

$$G(T,B,N) = -k_B T N \log\left[2\cosh\left(\frac{mB}{k_B T} \right) \right], \tag{3}$$

wobei m das magnetische Moment eines einzelnen Spins bezeichnet. Leiten Sie daraus durch differenzieren einen Ausdruck für die Magnetisierung M ab.

(c) Berechnen Sie die Wärmekapazität eines paramagnetischen Systems bei konstanter Magnetisierung,

$$C_M = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{M,N},$$

sowie bei konstantem externen Magnetfeld,

$$C_B = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{B,N}.$$

(d) Leiten Sie einen expliziten Ausdruck für die magnetische Suszeptibilität eines paramagnetischen Systems bei konstanter Temperatur,

$$\chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_{T,N},$$

sowie bei konstanter Entropie,

$$\chi_S = \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_{S,N},$$

her.

Zusatzfrage (ohne Bewertung). Erklären Sie die obigen Ergebnisse für C_M und χ_S.

Hinweis. Für (c) und (d) ist es wichtig, dass die geeigneten thermodynamischen Potentiale und die richtigen unabhängigen Variablen gewählt werden.

6. Maxwell- und Kreisrelationen

Für drei beliebige Größen a, b und c gilt im Allgemeinen die Eulersche Kreisrelation

$$\left(\frac{\partial a}{\partial b} \right)_c \left(\frac{\partial b}{\partial c} \right)_a \left(\frac{\partial c}{\partial a} \right)_b = -1. \tag{4}$$

(a) Leiten Sie die Eulersche Kreisrelation aus den Eigenschaften der Jacobi-Determinante her.

(b) Berechnen Sie die Ableitung $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ für ein van der Waals Gas mit Zustandsgleichung

$$p = \frac{k_B T}{v - b} - \frac{a}{v^2}, \quad \text{mit} \quad v = \frac{V}{N}. \tag{5}$$

Wieso ist hier die Kreisrelation besonders nützlich?

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Maxwellrelationen und der Kreisrelation für S, T und p, dass für einen reversiblen, isobaren Prozess in einem idealen Gas

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = \frac{V}{C_p} \tag{6}$$

gilt.

Kreuze für: 4(a+b); 4(c+d); 5(a+b); 5(c+d); 6(a+b); 6(c)