Statistische Physik I (SS 2017): Tutorium 3

7. Phasenraum

Betrachten Sie die eindimensonale Bewegung eines Teilchens im Schwerefeld, welches für $z > 0$ durch die Hamiltonfunktion

$$H(z, p) = \frac{p^2}{2m} + mgz \tag{1}$$

beschrieben wird und bei $z = 0$ durch den Boden elastisch reflektiert wird. Die Bewegung in der x, y Ebene braucht nicht berücksichtigt werden.

(a) Lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und skizzieren Sie die Bewegung des Teilchens im Phasenraum für die Anfangsbedingungen $z_0 > 0$ und $p_0 > 0$. Skizzieren Sie die mikrokanonische Phasenraumdichte $\rho_{\mathrm{MK}}(z, p)$ für ein Teilchen mit einer Energie im Intervall $[E - \Delta, E]$, wobei $\Delta \ll E$.

(b) Berechnen Sie die Zustandssumme $\Omega(E, \Delta)$ und die mikrokanonische Entropie $S(E, \Delta)$.

8. Ultrarelativistisches klassisches Gas

Betrachten Sie ein klassisches Gas aus N nichtwechselwirkenden Teilchen in einem 3D Volumen V. Die Bewegung der Teilchen ist ultrarelativistisch und wird durch die Hamiltonfunktion

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{N} c|\vec{p}_i|, \tag{2}$$

beschrieben, wobei $\vec{p}_i = (p_{i,x}, p_{i,y}, p_{i,z})$ den Impuls des i-ten Teilchens bezeichnet.

(a) Wie lautet die kanonische Phasenraumdichte für das ultrarelativistische Gas? Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_{K}.

(b) Berechnen Sie die freie Energie $F(T, V, N)$ und die Entropie $S(T, V, N)$ für $N \gg 1$. Erfüllt die Entropie den 3. Hauptsatz der Thermodynamik? Wie lauten die kalorische Zustandsgleichung $E(T, V, N)$ und die thermische Zustandsgleichung $p(T, V, N)$ für ein ultrarelativistisches Gas?

(c) Berechnen Sie nun auch die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E, N, V)$ und die mikrokanonische Entropie $S(E, V, N)$. Zeigen Sie, dass das Resultat für große N mit der Berechnung aus Aufgabe (b) übereinstimmt.

Hinweis: Führen Sie dimensionslose Variablen ein und berechnen Sie das verbleibende Integral, z.B., durch Induktion.

Bemerkung: Diese Aufgabe illustriert, dass für große N die mikrokanonische und die kanonische Beschreibung ident sind, es aber in der Praxis gewöhnlich einfacher ist, Berechnungen mit der kanonischen Phasenraumdichte durchzuführen.

9. Virialsatz

Gegeben sei ein gebundenes System aus N Teilchen mit Hamiltonfunktion

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} + V(\underline{q}) = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}. \tag{3}$$

Das System is durch einen Vektor $\pi = (\underline{q}, \underline{p}) = (q_1, q_2, ..., p_1, p_2, ...)$ im $6N$-dimensionalen Phasenraum beschrieben.

(a) Zeigen Sie die allgemeine Gültigkeit des Virialsatzes

$$\left\langle \pi_i \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \right\rangle_{\text{K}} = k_B T \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, 6N, \tag{4}$$

wobei $\langle \ldots \rangle_{\text{K}}$ den Mittelwert mit der kanonischen Phasenraumdichte ρ_{K} bezeichnet.

(b) Zeigen Sie damit, dass für ein System aus N gekoppelten 3D harmonischen Oszillatoren mit

$$V(\underline{q}) \equiv E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3N} K_{ij} q_i q_j, \qquad \text{wobei} \qquad K_{ij} = K_{ji}, \tag{5}$$

die Mittelwerte der potentiellen und kinetischen Energie den universellen Wert

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{3}{2} N k_B T, \tag{6}$$

annehmen.

Kreuze für: 7(a); 7(b); 8(a); 8(b); 8(c); 9(a-b)