Statistische Physik I (SS 2017): Tutorium 5

14. Dichteoperatoren

Geben sei ein Quantensystem mit Basiszuständen $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ und 2 Dichteoperatoren

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\rho}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ -2i & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Stellen Sie die beiden Dichteoperatoren in Diagonalform $\hat{\rho} = \sum_{n=1}^{3} p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ dar und bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten p_n und Eigenzustände $|\psi_n\rangle$.

(b) Berechnen Sie die Reinheit und die Entropie von $\hat{\rho}_1$ und $\hat{\rho}_2$.

(c) Berechnen Sie die Matrixdarstellung der Operatoren $\hat{C}_1 = e^{-x\hat{\rho}_1}$ und $\hat{C}_2 = \cos(\frac{\pi}{2}\hat{\rho}_2)$.

15. Dichteoperator eines Zwei-Niveau-Systems

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Zwei-Niveau-System (ZNS) mit Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Gegeben sei ein allgemeiner Dichteoperator des ZNS in Matrixdarstellung

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei $\rho_{ij} = \langle i|\hat{\rho}|j\rangle$.

(a) Wieviele unabhängige reelle Parameter sind zur Bestimmung eines beliebigen Dichteoperators für ein ZNS nötig? Begründen Sie Ihre Antwort mit den allgemeinen Eigenschaften von Dichteoperatoren.

(b) Berechnen Sie den Vektor $\vec{S} = (\langle\hat{\sigma}_x\rangle, \langle\hat{\sigma}_y\rangle, \langle\hat{\sigma}_z\rangle)^T$ der sich aus den Erwartungswerten der drei Pauli-Matrizen $\sigma_{x,y,z}$ für einen allgemeinen Dichteoperator ergibt. Drücken Sie die Dichtematrix in Gleichung (2) durch die Erwartungswerte S_x, S_y und S_z aus.

(c) Drücken Sie $\vec{S}$ in Polarkoordinaten aus und bestimmen Sie die Beziehung zwischen (r, θ, ϕ) und den Elementen ρ_{ij}.

(d) Berechnen Sie die Reinheit $R = \mathrm{Sp}\{\hat{\rho}^2\}$ von $\hat{\rho}$ und drücken Sie das Resultat als Funktion der Matrixelemente ρ_{ij} und mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung von $\vec{S}$ aus.

16. Zwei-Moden-Verschränkung

Gegeben sei ein System aus zwei harmonischen Oszillatoren mit jeweiligen Basiszuständen $|n\rangle_A$ und $|n\rangle_B$. Der Dichteoperator des Gesamtsystems sei

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \qquad |\Psi\rangle = \sqrt{1-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{\frac{n}{2}}\, |n\rangle_A \otimes |n\rangle_B, \qquad 0 < \lambda < 1. \tag{3}$$

(a) Berechnen Sie den reduzierten Dichteoperator $\hat{\rho}_A$ des Subsystems A, sowie die Entropie von $\hat{\rho}$ und von $\hat{\rho}_A$.

(b) Bestimmen Sie die Varianz $\langle \hat{q}_A^2 \rangle = \langle \hat{q}_B^2 \rangle$ und die Korrelation $\langle \hat{q}_A \hat{q}_B \rangle \equiv \mathrm{Sp}\left\{\hat{q}_A \hat{q}_B \hat{\rho}\right\}$, wobei $\hat{q}_j = (\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger)/\sqrt{2}$, $j = A, B$, und $\hat{a}_j$, $\hat{a}_j^\dagger$ sind die Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperator für den Oszillator $j = A, B$. Zeigen Sie damit, dass für diesen 2-Moden-verschränkten Zustand die Unschärfe des relativen Abstands, $\Delta\hat{q} = \hat{q}_A - \hat{q}_B$, sehr viel kleiner sein kann als die Unschärfe der absoluten Position jedes einzelnen Oscillators, d.h. $\langle (\hat{q}_A - \hat{q}_B)^2 \rangle < \langle \hat{q}_A^2 \rangle$.

Kreuze für: 14a); 14b)+c); 15a)+b); 15c)+d); 16a); 16b)