Statistische Physik I (SS 2017): Tutorium 6

17. Isoliertes Spin-Ensemble

Gegeben Sei ein isoliertes System aus N nicht-wechselwirkenden Spin-1/2 Teilchen mit Zuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ und Hamiltonoperator (siehe Vorlesung)

$$\hat{H} = E_0 \sum_{i=1}^{N} |\uparrow\rangle_i\langle\uparrow|. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie den mikrokanonischen Dichteoperator $\hat{\rho}_{\mathrm{MK}}(E)$ und die Entropie $S(E)$ für gegebenes $N \gg 1$. Skizzieren Sie den Verlauf von $S(E)$.

(b) Berechnen Sie die Temperatur T als Funktion von E und diskutieren Sie das Resultat.

(c) Berechnen und skizzieren Sie die spezifische Wärmekapazität C (bei konstantem E_0 und N) als Funktion von E.

18. Thermische und kohärente Zustände eines harmonischen Oszillators

Betrachten Sie einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator mit Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \tag{2}$$

und Energie-Eigenzuständen $|n\rangle$. Vergleichen Sie im Folgenden den thermischen (kanonischen) Zustand des harmonischen Oszillators $\hat{\rho}_{\mathrm{K}}$ mit einem sogenannten kohärenten Zustand

$$\hat{\rho}_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|, \qquad \text{mit} \qquad |\alpha\rangle := e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{3}$$

(a) Berechnen Sie $\langle\hat{n}\rangle$ und die Besetzungswahrscheinlichkeiten p_n für die zwei Zustände und vergleichen Sie (Skizze) die resultieren Besetzungsverteilungen bei gleicher mittlerer Besetzungszahl $\langle\hat{n}\rangle > 1$.

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$ und $\Delta x = \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2}$ für die zwei Zustände.

19. Variationsrechnung: quartisches Potential

Gegeben Sei ein 1D *klassisches* Gas mit $N \gg 1$ Teilchen in einem quartischen Potential. Die Hamiltonfunktion ist durch

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \Lambda q_i^4 \right) \tag{4}$$

gegeben. Für dieses Problem soll die freie Energie F durch Variationsrechnung approximativ bestimmt werden. Betrachten Sie dazu das einfachere Testsystem mit Hamiltonfunktion

$$H^*(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_*^2 q_i^2 \right), \tag{5}$$

und einer variablen Fallenfrequenz ω_*.

(a) Berechnen Sie zuerst die kanonische Zustandssumme Z_{K}^* und die freie Energie F^* für das einfache harmonische System $H^*(\underline{q}, \underline{p})$.

(b) Bestimmen Sie aus der Ungleichung (siehe Vorlesung)

$$F < F^* + \langle H - H^* \rangle_{\rho^*} \tag{6}$$

einen approximativen Ausdruck für die freie Energie F, indem Sie die rechte Seite als Funktion von ω_* minimieren, d.h. $F \approx F_{\mathrm{ap}} = \min\{F^* + \langle H - H^* \rangle_{\rho^*} | \omega_* > 0\}$.

(c) Berechnen Sie nun auch die exakte kanonische Zustandssumme Z_{K} und die freie Energie F für das Gas im quartischen Potential [Gleichung (4)] und vergleichen Sie das Ergebnis für F mit dem Resultat der Variationsrechnung.

Hinweis:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 3\sigma^4, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^4} = \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{4}) \approx 1.81.$$

Kreuze für: 17a); 17b)+c); 18a); 18b); 19a); 19b)+c)