Statistische Physik I (SS 2017): Tutorium 9

26. Kondensation im Schwerefeld

Ein Gas aus N Bosonen mit Masse m und Spin $S = 0$ sei in einem offenen Behälter mit Grundfläche $A = L \times L$ in der (x, y)-Ebene eingeschlossen. In z-Richtung wird das Gas durch eine harte Wand bei $z = 0$ und nach oben hin durch die Gravitationskraft gebunden. Die Einteilchen-Energieeigenwerte sind für dieses Problem in guter Näherung durch

$$E_{\vec{n}} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(n_x^2 + n_y^2\right) + mgh_0 n_z^{\frac{2}{3}}, \qquad h_0 = \left(\frac{9\pi^2\hbar^2}{8m^2 g}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{1}$$

gegeben, wobei $n_{x,y} \in \mathbb{Z}$, $n_z = 1, 2, \ldots, \infty$ und $g \simeq 9.81$ m/s^2.

(a) Vergleichen Sie die Verteilung der Energieeigenwerte $E_{\vec{n}}$ mit denen eines Teilchens in einer 3D Box und argumentieren Sie rein qualitativ, warum es auch in diesem Fall zu einer Bose-Einstein-Kondensation kommen kann.

(b) Leiten Sie aus Gleichung (1) die Zustandsdichte

$$D(E) = \frac{A}{2\pi}\frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{E}{mgh_0}\right)^{\frac{3}{2}} = KE^{\frac{3}{2}} \tag{2}$$

für dieses System ab. *Hinweis:* Benutzen Sie, z.B., die Darstellung $D(E) = \sum_{\vec{n}} \delta(E - E_{\vec{n}}) \approx \int_0^\infty dn_z \int_{-\infty}^\infty dn_x \int_{-\infty}^\infty dn_y \delta(E - E_{\vec{n}})$.

(c) Berechnen Sie einen Ausdruck für die Teilchenzahl N und die Kondensationstemperatur T_c für das Bose Gas im Schwerefeld. Schreiben Sie das Resultat als

$$\frac{T_c}{T_g} = \eta \times \left(\frac{h_0^2}{A}N\right)^\gamma, \tag{3}$$

wobei $T_g = (mgh_0)/k_B$, und bestimmen Sie die numerischen Koeffizienten η und γ.

(d) Berechnen Sie h_0, T_g und T_c für ein Gas aus $N = 10^5$ Rubidium Atomen der Masse $m = 85$ amu und für $L = 100\,\mu$m.

27. Wärmekapazität eines Bose Gases

Betrachten Sie ein Gas aus nichtwechselwirkenden Bosonen mit Spin $S = 0$ in einem 3D harmonischen Potential mit Fallenfrequenz ω. Analog zur Aufgabe (25) können für dieses System die folgenden Ausdrücke

$$N = N_0 + \frac{(k_B T)^3}{(\hbar\omega)^3} g_3(z), \qquad U = 3\frac{(k_B T)^4}{(\hbar\omega)^3} g_4(z), \tag{4}$$

für die Teilchenzahl und die innere Energie abgeleitet werden, wobei $z \equiv z(N, T)$.

(a) Berechnen Sie die Wärmekapazität pro Teilchen,

$$\bar{C}(T) = \frac{C}{k_B N} = \frac{1}{k_B N} \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_N, \tag{5}$$

unterhalb der kritischen Temperatur T_c. *Hinweis:* $z(T < T_c) = 1$.

(b) Berechnen Sie nun auch die Wärme oberhalb der kritischen Temperatur und drücken Sie das Resultat als Funktion von T und den Bose Integralen $g_\alpha(z)$ aus. Skizzieren Sie approximativ den Verlauf von $\bar{C}(T)$ und zeigen Sie, dass $\bar{C}(T \gg T_c) \simeq 3$ und, dass $\bar{C}(T)$ bei $T = T_c$ eine Diskontinuität aufweist.

Hinweis: Für diese Rechnung benötigen Sie die Ableitung $\partial z/\partial T|_N$, die mit Hilfe der Bedingung

$$\left. \frac{\partial N}{\partial T} \right|_N = 0 \tag{6}$$

aus der Gleichung von $N(z)$ hergeleitet werden kann. Verwenden Sie weiters die Relation $\partial_z g_\alpha(z) = g_{\alpha-1}(z)/z$.

Bemerkung: Aus der analogen Rechnung für ein Bose Gas in einer 3D Box erhält man statt einem Sprung eine charakteristische Spitze in der spezifischen Wärmekapazität, die man als Lambda-Anomalie bezeichnet.

28. Photonengas

Das Strahlungsfeld in einem Hohlraum mit Volumen V wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{\mathrm{EM}} = \sum_k \hbar\omega_k \, \hat{a}_k^\dagger a_k, \qquad k \equiv (\lambda, \vec{k}), \tag{7}$$

beschrieben, woraus sich die freie Energie

$$F(T, V) = -\frac{4\sigma}{3c} V T^4, \qquad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}, \tag{8}$$

(σ ist die Stefan-Boltzmann-Konstante) ableiten lässt (siehe Vorlesung).

(a) Berechnen Sie, ausgehend von $F(T, V)$, den Druck, die Entropie und die innere Energie des Photonengases und zeigen Sie dann mit Hilfe der Gibbs-Duhem Relation, dass $\mu = 0$.

(b) Berechnen Sie die mittlere Photonenzahl $N = \sum_k \langle \hat{n}_k \rangle$ und zeigen Sie die folgende Relation

$$pV \approx 0.90 \times N k_B T. \tag{9}$$

D.h., Photonen erzeugen einen ähnlich großen Druck wie massive Teilchen, allerdings ist die Teilchendichte eines Photongases unter gewöhnlichen Bedingungen sehr gering. Berechnen Sie N/V und p für eine Photonengas bei Raumtemperatur und für $T = 10^7$ K (entspricht in etwa der Temperatur im Inneren der Sonne oder der Temperatur während einer Atombombenexplosion).

Kreuze für: 26a+b); 26c+d); 27a); 27b); 28a); 28b)