Statistische Physik I (SS 2017): Tutorium 9

26. Kondensation im Schwerefeld

Ein Gas aus N Bosonen mit Masse m und Spin $S = 0$ sei in einem offenen Behälter mit Grundfläche $A = L \times L$ in der (x, y)-Ebene eingeschlossen. In z-Richtung wird das Gas durch eine harte Wand bei $z = 0$ und nach oben hin durch die Gravitationskraft gebunden. Die Einteilchen-Energieeigenwerte sind für dieses Problem in guter Näherung durch

$$E_{\vec{n}} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2) + mgh_0 n_z^{\frac{2}{3}}, \qquad h_0 = \left(\frac{9\pi^2\hbar^2}{8m^2 g}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{1}$$

gegeben, wobei $n_{x,y} \in \mathbb{Z}$, $n_z = 1, 2, \ldots, \infty$ und $g \simeq 9.81$ m/s^2.

(a) Vergleichen Sie die Verteilung der Energieeigenwerte $E_{\vec{n}}$ mit denen eines Teilchens in einer 3D Box und argumentieren Sie rein qualitativ, warum es auch in diesem Fall zu einer Bose-Einstein-Kondensation kommen kann.
Wegen $E \sim n_z^{2/3}$ sind die Energieabstände als Funktion von n_z im Schwerefeld kleiner as in einem Box-Potential. D.h. die Zustandsdichte skaliert stärker mit der Energie als im 3D Fall. Daher ergibt sich ein $N \sim g_\alpha(z)$ mit $\alpha > 3/2$ (enspricht der 3D Box) und $g_\alpha(1) < \infty$.

(b) Leiten Sie aus Gleichung (1) die Zustandsdichte

$$D(E) = \frac{A}{2\pi}\frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{E}{mgh_0}\right)^{\frac{3}{2}} = KE^{\frac{3}{2}} \tag{2}$$

für dieses System ab. *Hinweis:* Benutzen Sie, z.B., die Darstellung $D(E) = \sum_{\vec{n}} \delta(E - E_{\vec{n}}) \approx \int_0^\infty dn_z \int_{-\infty}^{\infty} dn_x dn_y \delta(E - E_{\vec{n}})$.
Mit $E_g = mgh_0$ und $\tilde{E} = E - E_0 n^{2/3}$ erhalten wir

$$D(E) = \int_0^{(E/E_0)^{3/2}} dn_z \underbrace{\int dn_x \int dn_y\, \delta\left(\tilde{E} - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2)\right)}_{=D_{2D}(\tilde{E})} \tag{3}$$

Dabei ist $D_{2D}(E) = Am/(2\pi\hbar^2)$ die Zustandsdichte eines Gases in 2D, die z.B. durch Einführen von Polarkoordinaten abgleitet werden kann. Da $D_{2D}(E)$ unabhängig von der Energie ist, folgt sofort Gleichung (2).

(c) Berechnen Sie einen Ausdruck für die Teilchenzahl N und die Kondensationstemperatur T_c für das Bose Gas im Schwerefeld. Schreiben Sie das Resultat als

$$\frac{T_c}{T_g} = \eta \times \left(\frac{h_0^2}{A}N\right)^{\gamma}, \tag{4}$$

wobei $T_g = (mgh_0)/k_B$, und bestimmen Sie die numerischen Koeffizienten η und γ.
Aus $D(E)$ folgt

$$N = N_0 + K(k_BT)^{5/2}\Gamma(5/2)g_{\frac{5}{2}}(z) = N_0 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4}K(k_BT)^{5/2}g_{\frac{5}{2}}(z). \tag{5}$$

Für $T = T_c$ gilt $N_0 = 0$ und $z = 1$ und durch Einsetzen der Definitionen von T_g und h_0 erhält man

$$k_BT_c = \left(\frac{4N}{3\sqrt{\pi}Kg_{\frac{5}{2}}(1)}\right)^{2/5}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T_c}{T_g} = \underbrace{\left(\frac{64}{27\pi^{\frac{3}{2}}g_{\frac{5}{2}}(1)}\right)^{\frac{2}{5}}}_{\simeq 0.63} \times \left(\frac{h_0^2}{A}N\right)^{2/5}. \tag{6}$$

(d) Berechnen Sie h_0, T_g und T_c für ein Gas aus $N = 10^5$ Rubidium Atomen der Masse $m = 85$ amu und für $L = 100\,\mu$m.

$$h_0 = 825\,\text{nm}, \qquad T_g = 83\,\text{nK}, \qquad T_c = 113\,\text{nK}. \tag{7}$$

27. Wärmekapazität eines Bose Gases

Betrachten Sie ein Gas aus nichtwechselwirkenden Bosonen mit Spin $S = 0$ in einem 3D harmonischen Potential mit Fallenfrequenz ω. Analog zur Aufgabe (25) können für dieses System die folgenden Ausdrücke

$$N = N_0 + \frac{(k_BT)^3}{(\hbar\omega)^3}g_3(z), \qquad U = 3\frac{(k_BT)^4}{(\hbar\omega)^3}g_4(z), \tag{8}$$

für die Teilchenzahl und die innere Energie abgeleitet werden, wobei $z \equiv z(N,T)$.

(a) Berechnen Sie die Wärmekapazität pro Teilchen,

$$\bar{C}(T) = \frac{C}{k_BN} = \frac{1}{k_BN}\left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_N, \tag{9}$$

unterhalb der kritischen Temperatur T_c. *Hinweis:* $z(T < T_c) = 1$.
Da $z = 1$, ist $\partial z/\partial T = 0$ und daher

$$\left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_N = 12k_B\frac{(k_BT)^3}{(\hbar\omega)^3}g_4(1). \tag{10}$$

Weiters findet man aus der Gleichung für N bei $T = T_c$

$$N = \frac{(k_BT_c)^3}{(\hbar\omega)^3}g_3(1), \tag{11}$$

und man erhält insgesamt

$$\bar{C}(T < T_c) = \frac{1}{k_BN}\left[12k_B\frac{(k_BT)^3}{(\hbar\omega)^3}g_4(1)\right] = 12\frac{g_4(1)}{g_3(1)}\left(\frac{T}{T_c}\right)^3. \tag{12}$$

(b) Berechnen Sie nun auch die Wärme oberhalb der kritischen Temperatur und drücken Sie das Resultat als Funktion von T und den Bose Integralen $g_\alpha(z)$ aus. Skizzieren Sie approximativ den Verlauf von $\bar{C}(T)$ und zeigen Sie, dass $\bar{C}(T \gg T_c) \simeq 3$ und, dass $\bar{C}(T)$ bei $T = T_c$ eine Diskontinuität aufweist.

Hinweis: Für diese Rechnung benötigen Sie die Ableitung $\partial z/\partial T|_N$, die mit Hilfe der Bedingung

$$\left.\frac{\partial N}{\partial T}\right|_N = 0 \tag{13}$$

aus der Gleichung von $N(z)$ hergeleitet werden kann. Verwenden Sie weiters die Relation $\partial_z g_\alpha(z) = g_{\alpha-1}(z)/z$.

Bemerkung: Aus der analogen Rechnung für ein Bose Gas in einer 3D Box erhält man statt einem Sprung eine charakteristische Spitze in der spezifischen Wärmekapazität, die man als Lambda-Anomalie bezeichnet.

$$\left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_N = 12k_B\frac{(k_BT)^3}{(\hbar\omega)^3}g_4(z) + 3\frac{(k_BT)^4}{(\hbar\omega)^3}g_4'(z)\left.\frac{\partial z}{\partial T}\right|_N . \tag{14}$$

Aus

$$\left.\frac{\partial N}{\partial T}\right|_N = 3k_B\frac{(k_BT)^2}{(\hbar\omega)^3}g_3(z) + \frac{(k_BT)^3}{(\hbar\omega)^3}g_3'(z)\left.\frac{\partial z}{\partial T}\right|_N = 0 \tag{15}$$

folgt

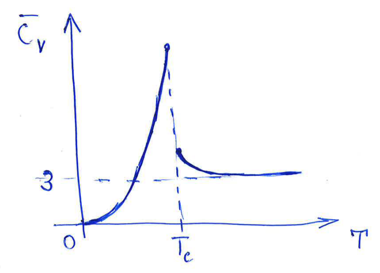
$$\left.\frac{\partial z}{\partial T}\right|_N = -\frac{3}{T}\frac{g_3(z)}{g_3'(z)}. \tag{16}$$

Insgesamt und mit $g_\alpha'(z) = g_{\alpha-1}/z$ erhält man

$$\bar{C}(T > T_c) = 12\frac{g_4(z)}{g_3(z)} - 9\frac{g_3(z)}{g_2(z)}. \tag{17}$$

Für $z \ll 1$ folgt wegen $g_\alpha(z) \approx z$ das klassische Resultat $\bar{C} = 3$ und da alle $g_\alpha(1)$ mit $\alpha > 1$ endlich sind ergibt sich ein Sprung

$$\lim_{T\to T_c}\left[\bar{C}(T<T_c) - \bar{C}(T>T_c)\right] = 9\frac{g_3(1)}{g_2(1)} \approx 6.58. \tag{18}$$



28. Photonengas

Das Strahlungsfeld in einem Hohlraum mit Volumen V wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{\mathrm{EM}} = \sum_k \hbar\omega_k\,\hat{a}_k^\dagger a_k, \qquad k \equiv (\lambda, \vec{k}), \tag{19}$$

beschrieben, woraus sich die freie Energie

$$F(T,V) = -\frac{4\sigma}{3c}VT^4, \qquad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}, \tag{20}$$

(σ ist die Stefan-Boltzmann-Konstante) ableiten lässt (siehe Vorlesung).

(a) Berechnen Sie, ausgehend von $F(T,V)$, den Druck, die Entropie und die innere Energie des Photonengases und zeigen Sie dann mit Hilfe der Gibbs-Duhem Relation, dass $\mu = 0$.

$$p = -\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_T = \frac{4\sigma}{3c}T^4, \qquad S = -\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_V = \frac{16\sigma}{3c}T^3, \qquad E = F + TS = \frac{4\sigma}{c}VT^4 \tag{21}$$

Gibbs-Duhem

$$E - TS + pV - \mu N = 0, \qquad \mu N = 0. \tag{22}$$

(b) Berechnen Sie die mittlere Photonenzahl $N = \sum_k \langle \hat{n}_k \rangle$ und zeigen Sie die folgende Relation

$$pV \approx 0.90 \times N k_B T. \tag{23}$$

D.h., Photonen erzeugen einen ähnlich großen Druck wie massive Teilchen, allerdings ist die Teilchendichte eines Photongases unter gewöhnlichen Bedingungen sehr gering. Berechnen Sie N/V und p für eine Photonengas bei Raumtemperatur und für $T = 10^7$ K (entspricht in etwa der Temperatur im Inneren der Sonne oder der Temperatur während einer Atombombenexplosion).

$$N = 2\sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1} = \frac{V}{\pi^2}\int_0^\infty dk\, \frac{k^2}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1} = \frac{V}{\pi^2}\frac{1}{(\beta\hbar c)^3}\underbrace{\int_0^\infty dx\, \frac{x^2}{e^x - 1}}_{\Gamma(3)\zeta(3)} = \frac{V}{\pi^2}\frac{2\zeta(3)}{(\beta\hbar c)^3} \tag{24}$$

$$pV \approx \left(\frac{4\sigma\pi^2(\hbar c)^3}{6c\zeta(3)k_B^4}\right) \times N k_B T = \left(\frac{\pi^4}{90\zeta(3)}\right) \times N k_B T \tag{25}$$

Zahlenwerte:

$$p(T = 300\,\mathrm{K}) \approx 6 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa}, \qquad p(T = 10^7\,\mathrm{K}) \approx 8 \times 10^{12}\,\mathrm{Pa} \approx 8 \times 10^7\,\mathrm{bar} \tag{26}$$

Kreuze für: 26a+b); 26c+d); 27a); 27b); 28a); 28b)