Statistische Physik I, SS 2017: Test 2 (23.06.2017)

Name:

Matrikelnummer:

---

1. Dichteoperatoren (10P)

Eine hermitsche 2×2 Matrix kann durch die Einheitsmatrix $\hat{I}$ und die Pauli Matrizen $\hat{\sigma}_{n=x,y,z}$ (siehe Formelsammlung) in der allgemeinen Form

$$\hat{\rho} = a_0 \hat{I} + \sum_{n=x,y,z} a_n \hat{\sigma}_n,$$

dargestellt werden, wobei a_0, a_x, a_y, a_z reelle Zahlen sind.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ von $\hat{\rho}$. Unter welchen Bedingungen an a_0, a_x, a_y, a_z stellt $\hat{\rho}$ einen Dichteoperator dar (kurze Begründung)? Wann entspricht $\hat{\rho}$ einem reinen Zustand? **(5P)**

(b) Geben Sie einen Ausdruck für die Entropie $S(\hat{\rho})$ als Funktion der Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ an. **(2P)**

(c) Gegeben sei ein Zwei-Niveau-System mit Hamiltonoperator $\hat{H} = \Delta \hat{I} - \frac{1}{2}\Omega \hat{\sigma}_z$. Berechnen Sie die Werte der Parameter $a_{0,x,y,z}$ für den kanonischen Dichteoperator für dieses System. **(3P)**

2. Ideales Bose Gas (16P)

Für ein (fiktives) d-dimensionales Gas aus nichtwechselwirkenden Bosonen mit Spin $S = 0$ sei die Zustandsdichte von der Form

$$D(E) = K_d \, E^{\frac{d-1}{3}}. \tag{1}$$

(a) Leiten Sie aus dieser Zustandsdichte einen Ausdruck für die mittlere Teilchenzahl N und für die innere Energie U ab. Drücken Sie das Ergebnis mit Hilfe der Bose-Integrale $g_\alpha(z)$ aus. **(5P)**

(b) Für welche Dimension $d = 1, 2, 3$ gibt es eine Bose-Einstein Kondensation (kurze Begründung)? Berechnen Sie die Kondensationstemperatur T_c für die entsprechenden Werte von d. **(3P)**

(c) Bestimmen Sie für $d = 3$ das Verhalten von $N_0(T)$ und der Wärmekapazität $C(T) = \frac{\partial U}{\partial T}|_N$ für $T < T_c$. **(3P)**

(d) Identifizieren Sie für $d = 3$ den Entartungsparameter σ für dieses System, so dass $\sigma \ll 1$ dem klassischen Grenzfall entspricht. Berechnen Sie das chemische Potential $\mu(T, N)$ im klassischen Grenzfall und die Quantenkorrektur zum chemischen Potential in niedrigster Ordnung in σ. **(5P)**

3. Fermionen im Wellenleiter (16P)

N nichtwechselwirkende Fermionen mit Spin $S = \frac{1}{2}$ und Masse m bewegen sich entlang der z-Richtung frei in einem Behälter der Länge L (es können periodische Randbedingungen angenommen werden). In x- und y-Richtungen sind die Teilchen durch ein harmonisches Potential $V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$ gebunden.

(a) Geben Sie einen Ausdruck für die Einteilchen-Energieniveaus dieses Systems an. Berechnen Sie daraus die Zustandsdichte $D(E)$. **(5P)**

(b) Bestimmen Sie die Fermi-Energie E_F und die innere Energie $U(T=0)$. **(3P)**

(c) Berechnen Sie die Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials $\mu(T)$ bis zur Ordnung T^2. **(4P)**

(d) Berechnen Sie die Wärmekapazität $C(T) = \frac{\partial U}{\partial T}|_N$ für kleinen Temperaturen bis zur ersten Ordnung in T. **(4P)**

Achtung: Falls 3(a) nicht gelöst wird, können die Aufgaben 3(b)–3(d) mit Hilfe der allgemeinen Zustandsdichte $D(E) = KE^\gamma$ gerechnet werden.

4. Photonengas in 2D (8P)

Das quantisierte elektromagnetische Feld zwischen zwei ebenen Spiegeln mit Querschnittsfläche $A = L \times L$ kann durch ein 2D Photonengas mit Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \hat{a}^\dagger_{\lambda,\vec{k}} \hat{a}_{\lambda,\vec{k}}, \qquad \omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|, \tag{2}$$

beschrieben werden, wobei $\vec{k} = (k_x, k_y)$ den 2D Wellenvektor parallel zur Spiegelebene bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie die spektrale Energiedichte $u(\omega,T)$ für das 2D Photonengas. Skizzieren Sie den Verlauf von $u(\omega,T)$ als Funktion der Frequenz ω. Bei ungefähr welcher Frequenz $\omega_{\max}$ liegt das Maximum von $u(\omega,T)$? **(4P)**

(b) Wie lauten das ‘Rayleigh-Jeans-Gesetz’ und das ‘Wiensche Strahlungsgesetz’ in 2D? **(2P)**

(c) Berechnen Sie die gesamte innere Energie $U(T)$ des 2D Photonengases. **(2P)**

Formelsammlung:

- **Pauli Matrizen**

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Eigenschaften der Pauli Matrizen:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \hat{1}, \qquad \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = i\,\sigma_z, \qquad \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z = i\,\sigma_x, \qquad \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x = i\,\sigma_y$$

- **Gamma Funktion:**

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty dy\, y^{n-1} e^{-y}, \qquad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \qquad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{3}$$

- **Stirling Formel:**

$$N! \approx \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N, \qquad \ln N! \approx N \ln N - N \tag{4}$$

- **Fermi-Integral:**

$$f_\alpha(z) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{(e^y/z)+1} dy = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n^\alpha} \tag{5}$$

- **Bose-Integral:**

$$g_\alpha(z) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{(e^y/z)-1} dy = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^\alpha}, \qquad g_\alpha(1) = \zeta(\alpha) \tag{6}$$

  Ableitungsregel: $g'_\alpha(z) = g_{\alpha-1}(z)/z$

  Spezielle Werte: $g_\alpha(1) = \infty$ für $\alpha \leq 1$ und

$g_{4/3}(1) = 3.601$	$g_{3/2}(1) = 2.612$	$g_{5/3}(1) = 2.124$	$g_2(1) = 1.645$
$g_{7/3}(1) = 1.415$	$g_{5/2}(1) = 1.341$	$g_{8/3}(1) = 1.284$	$g_3(1) = 1.202$

- **Werte der Zeta-Funktion $\zeta(\alpha)$:**
  $\zeta(2) = \pi^2/6 \mid \zeta(4) = \pi^4/90 \mid \zeta(6) = \pi^6/945$

- **Werte der Koeffizienten J_n in der Sommerfeld Entwicklung:**
  $J_0 = 1 \mid J_2 = \pi^2/3 \mid J_4 = 7\pi^4/15 \mid J_n = 0$ für n ungerade