Name:
Matrikelnummer:
Tutoriumsgruppe:
Zahl der abgegebenen Blätter:

1. Test - 27.4.2018

1. Eigenschaften des idealen Gases (15 Punkte)

Die freie Energie des idealen Gases ist gegeben durch

$$F(T,V,N) = -k_BT \ln\left(\frac{V^N (cT)^{\frac{3N}{2}}}{N!}\right),$$

wobei c eine (unwichtige) Konstante ist.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass es sich bei der freien Energie im Grenzfall großer Teilchenzahlen N um eine extensive Größe handelt. Verwenden Sie dafür die Stirling-Formel $N! \simeq N^N e^{-N}$ $(N \to \infty)$.

Lösung: Mit $N! = N^N e^{-N}$ ist die freie Energie gegeben durch

$$F(T,V,N) = -k_BT \ln\left(\frac{V^N (cT)^{\frac{3N}{2}}}{N^N e^{-N}}\right) = -Nk_BT \ln\left(\frac{V (cT)^{\frac{3}{2}}}{N}\right) - Nk_BT.$$

Die Extensivität folgt aus $F(T,\lambda V,\lambda N) = \lambda F(T,V,N)$.

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Entropie $S(T,V,N)$ als Funktion von T, V, N.

Lösung: Die Entropie ist gegeben durch

$$S(T,V,N) = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = -\frac{F}{T} + \frac{3}{2}Nk_B.$$

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie die kalorische Zustandsgleichung und zeigen Sie, dass $E(T,V,N)$ nicht vom Volumen V abhängt. Wie kann man dieses Resultat physikalisch erklären?

Lösung: Es gilt

$$E(T,V,N) = F(T,V,N) + TS(T,V,N) = \frac{3}{2}Nk_BT.$$

Antwort: Die Energie hängt bei konstanter Temperatur nicht vom Volumen ab, weil die Teilchen im idealen Gas nur kinetische und keine Wechselwirkungsenergie besitzen.

(d) (4 Punkte) In einem quasistatischen Prozess werden $X = pV^2$ und die Teilchenzahl N konstant gehalten. Berechnen Sie die zugehörige Wärmekapazität $C_X = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{X,N}$.

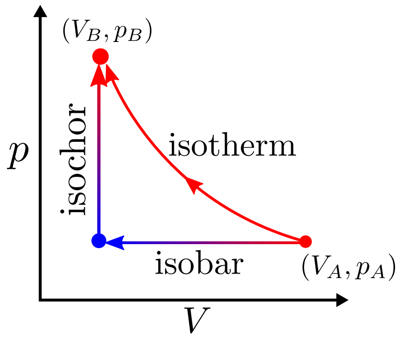
Lösung: Es gilt

$$C_X = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{X,N} + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{X,N} = \frac{3}{2}Nk_B + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{X,N}.$$

Mit $X = pV^2 = Nk_BTV$ erhält man

$$p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{X,N} = -p\frac{V}{T} = -Nk_B \qquad \text{und damit} \qquad C_X = \frac{Nk_B}{2}.$$

2. Thermodynamische Prozesse (10 Punkte)



Ein ideales Gas wird auf zwei unterschiedlichen Wegen vom Anfangszustand (V_A, p_A) quasistatisch in den Endzustand (V_B, p_B) gebracht (bei konstanter Teichenzahl). Der erste Weg besteht aus einem isothermen Prozess. Der zweite Weg besteht aus einem isobaren und einem isochoren Teilprozess.

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Änderung der Entropie entlang des ersten Weges. Warum muss die Änderung der Entropie entlang des zweiten Weges gleich sein?

Lösung: Es gilt

$$\Delta S_1 = \frac{1}{T}\int_{V_A}^{V_B} \delta Q = Nk_B \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = Nk_B \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right).$$

Antwort: Die Entropie ist eine Zustandsgröße.

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie die zugeführte Arbeit entlang beider Wege. Welcher der beiden Werte ist größer? Wie lässt sich das geometrisch im p-V-Diagramm erkennen?

Lösung: Für die Arbeit entlang des ersten Weg erhält man $\Delta W_1 = -\Delta Q = -T\Delta S_1$ und entlang des zweiten Weg $\Delta W_2 = p_A(V_A - V_B)$. Antwort: Es gilt $\Delta W_1 > \Delta W_2$, weil im pV-Diagramm die Fläche unter der ersten Kurve größer ist als unter der Zweiten.

(c) (3 Punkte) Berechnen Sie für das ideale Gas das totale Differential der Wärme $\delta Q = X_1 dp + X_2 dV$ in der p-V-Ebene und zeigen Sie, dass es sich um ein unvollständiges Differential handelt.

Lösung:

$$\delta Q = dE + pdV = \frac{3}{2}Nk_B dT + pdV = \frac{3}{2}(pdV + Vdp) + pdV = \frac{3}{2}Vdp + \frac{5}{2}pdV.$$

Die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial X_1}{\partial V} = \frac{\partial X_2}{\partial p} \Rightarrow \frac{3}{2} \neq \frac{5}{2}$$

ist offensichtlich nicht erfüllt.

3. Ideales Gas in harmonischer Falle (15 Punkte)

Ein ideales Gas aus N Teilchen der Masse m sei in einer dreidimensionalen harmonischen Falle mit Kreisfrequenz ω gefangen.

(a) (3 Punkte) Wie lautet die zugehörige Hamiltonfunktion?

Lösung:

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_i^2}{2}\right)$$

(b) (8 Punkte) Bestimmen Sie die mikrokanonische Zustandssumme

$$\Omega = \frac{1}{N!h^{3N}} \int \delta\big(E - H(\underline{q}, \underline{p})\big)\, d^{3N}q d^{3N}p.$$

Hinweis: Formel F1 ist hilfreich.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\Omega(E,\omega,N) &= \frac{1}{N!h^{3N}}\frac{\partial}{\partial E}\int \theta\big(E-H(\underline{q},\underline{p})\big)\, d^{3N}q d^{3N}p \\
&= \frac{1}{N!h^{3N}}(\sqrt{2m})^{3N}\left(\sqrt{\frac{2}{m\omega^2}}\right)^{3N}\frac{\partial}{\partial E}\int \theta\big(E-\sum_i^{6N}\xi_i^2)\big)\, d^{6N}\xi \\
&= \frac{1}{N!}\left(\frac{2}{h\omega}\right)^{3N}\frac{\partial}{\partial E}\frac{\pi^{3N}}{\Gamma(3N+1)}E^{3N} \\
&= \frac{1}{N!}\left(\frac{1}{\hbar\omega}\right)^{3N}\frac{E^{3N-1}}{\Gamma(3N)}.
\end{aligned}$$

(c) (4 Punkte) In einem quasistatischen Prozess werde die Kreisfrequenz der harmonischen Falle ω auf $\omega' = \frac{1}{2}\omega$ reduziert, während die innere Energie und die Teilchenzahl konstant bleiben. Berechnen Sie die Entropiedifferenz ΔS zwischen Anfangszustand und Endzustand.

Lösung: Es gilt

$$\Delta S = k_B \ln\big(\Omega(E,\omega',N)\big) - k_B\ln\big(\Omega(E,\omega,N)\big) = 3Nk_B\ln(2).$$

4. Phasenraumdichte (10 Punkte)

(a) (3 Punkte) Wie lautet das Liouvillesche Theorem (Formel) und welche anschauliche Vorstellung steckt dahinter?

Lösung: Das Liouvillesche Theorem lautet

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0.$$

Antwort: Der Phasenraumfluss ist volumserhaltend.

(b) (4 Punkte) Betrachten Sie ein Teilchen mit der Hamiltonfunktion $H(q,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(q,p,t) = q\sin(t) + p\cos(t)$ die Liouville-Gleichung erfüllt. Warum ist $f(q,p,t)$ trotzdem keine zulässige Phasenraumdichte?

Lösung: Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial t} = q\cos(t) - p\sin(t)$$

und

$$\{H,f\} = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = \cos(t)q - \sin(t)p.$$

Antwort: Weil $f(q,p,t)$ nicht normierbar ist und negative Werte annimmt.

(c) (3 Punkte) Wie lautet die mikrokanonische Phasenraumdichte für ein Teilchen mit der Hamiltonfunktion $H(q,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$? Skizzieren Sie diese in der q-p-Ebene. Berechnen Sie mithilfe der Ergodenhypothese den zeitlichen Erwartungswert der Observable $A(q,p) = q^2p^2$. **Hinweis:** Formeln F2 und F3 sind hilfreich.

Lösung: Die mikrokanonische Phasenraumdichte ist $\rho(q,p) = \Omega^{-1}\delta(E - H(q,p))$. Für Ω gilt

$$\Omega = \int \delta(E-H(q,p))dqdp = \frac{\partial}{\partial E}\int \theta(E-H(q,p))dqdp = \frac{\partial}{\partial E}2\pi E = 2\pi.$$

Der zeitliche Mittelwert $\bar{A}$ kann durch das Ensemblemittel $\langle A \rangle$ ersetzt werden:

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int q^2 p^2 \delta(E - \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2}) dq dp \\
&= \frac{1}{2\pi} \int q^2 p^2 \frac{1}{\sqrt{2E - p^2}} \Big(\delta(\sqrt{2E - p^2} - q) + \delta(\sqrt{2E - p^2} + q) \Big) dp dq \\
&= \frac{2}{2\pi} \int p^2 \sqrt{2E - p^2} dp = \frac{2}{2\pi} \frac{4E^2\pi}{8} = \frac{E^2}{2}.
\end{aligned}$$

Nützliche Formeln

F1: $$\int\limits_{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2 \leq R^2} d\xi_1 ... d\xi_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n$$

F2: $$\delta(a - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2a - x^2}} \Big(\delta(\sqrt{2a - x^2} - y) + \delta(\sqrt{2a - x^2} + y) \Big)$$

F3: $$\int_{-a}^{a} x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)} dx = \frac{\pi a^4}{8}$$