Name:
Matrikelnummer:
Zahl der abgegebenen Blätter (exklusive Angabe):

2. Test - 22.6.2018

Ideales Gas im Schwerefeld (14 Punkte)

Betrachten Sie ein klassisches ideales Gas aus N Teilchen der Masse m, welches sich in einem Zylinder mit Radius R und unbegrenzter Höhe befindet. Der Boden des Zylinders sei bei $z = 0$ und für alle Teilchen gelte $z_i > 0$. Zusätzlich wirke das Schwerefeld $V(x, y, z) = mgz$. Das Gas befinde sich im thermischen Gleichgewicht mit einer Umgebung der Temperatur T. Die Hamiltonfunktion des Gases ist gegeben durch

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + mgz_i \right).$$

(a) (5 Punkte) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K unter Annahme einer homogenen Temperaturverteilung.

(b) (3 Punkte) Verwenden Sie den Gleichverteilungssatz (Formel **F1**) um die mittlere Energie $\langle E \rangle$ zu berechnen.

(c) (3 Punkte) Bestätigen Sie ihr Resultat in Punkt (b), indem Sie die mittlere Energie $\langle E \rangle$ aus der kanonischen Zustandssumme Z_K berechnen.

(d) (3 Punkte) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $w(z)dz$, dass die Höhe z eines zufällig herausgegriffenen Teilchens im Intervall $[z, z + dz]$ liegt?

Ideales Gas in einem Gefäß mit permeablen Wänden (14 Punkte)

Betrachten Sie ein Gefäß mit Volumen V, in dem sich ein klassisches ideales Gas aus Teilchen der Masse m befindet. Die Wände seien durchlässig für Teilchen und Wärme. Die Umgebung sei durch die Temperatur T und das chemische Potential μ charakterisiert.

(a) (5 Punkte) Durch welches Ensemble wird das System beschrieben? Berechnen Sie die entsprechende Zustandssumme und geben Sie die zugehörige Phasenraumdichte an.

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie die mittlere Teilchenanzahl $\langle N \rangle$ und zeigen Sie, dass die Varianz $\Delta N^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ gegeben ist durch

$$\Delta N = \sqrt{\langle N \rangle}.$$

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie das chemische Potential μ als Funktion von $\langle N \rangle, T, V$.

(d) (2 Punkte) Welches Kriterium zwischen thermischer Wellenlänge λ_T und mittlerem Teilchenabstand $\bar{l} = (V/\langle N \rangle)^{\frac{1}{3}}$ gibt an, ob das Gas klassisch behandelt werden kann?

BITTE WENDEN!

Bosonen im Zwei-Zustands-System (10 Punkte)

Betrachten Sie ein System bestehend aus zwei nicht wechselwirkenden ununterscheidbaren Bosonen (Spin $s = 0$), die jeweils zwei Einteilchenzustände $|0\rangle$, $|1\rangle$ mit Einteilchenenergien $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ annehmen können. Das System sei an ein Wärmebad der Temperatur T gekoppelt.

(a) (2 Punkte) Welche Werte E_j für die Gesamtenergie sind in diesem System möglich? Welches Verhalten haben die zugehörigen Eigenzustände $|E_j\rangle$ bei Teilchenvertauschung?

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K sowie die Dichtematrix ρ_K in der Basis der Eigenzustände $|E_j\rangle$.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Dichtematrix ρ_K im Limes $T \to 0$ in einen reinen Zustand übergeht.

(d) (2 Punkte) Welchen Wert hat die Entropie S allgemein im Limes $T \to 0$. Wie wird dieses Resultat genannt?

Ideales Fermigas in d-dimensionaler Box (12 Punkte)

Betrachten Sie ein ideales Fermigas ($s = \frac{1}{2}$) bestehend aus Teilchen der Masse m in einer **d-dimensionalen** Box mit Volumen L^d, welches sich in Kontakt mit einer Umgebung der Temperatur T und chemischem Potential μ befindet. Die Energie der Einteilchenzustände sei gegeben durch ε_i.

(a) (5 Punkte) Berechnen Sie die mittlere Energie $\langle E\rangle$, indem Sie mithilfe der klassischen mikrokanonischen Zustandssumme eines Teilchens $\Omega_1(\varepsilon)$ die Summe

$$\langle E\rangle = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1}$$

in ein Integral umschreiben. **Hinweis:** Formel **F2** ist hilfreich zur Berechnung von $\Omega_1(\varepsilon)$.

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass zwischen der mittleren Energie $\langle E\rangle$ und dem großkanonischen Potential

$$J = -k_B T \sum_i \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)})$$

der Zusammenhang $\langle E\rangle = -\frac{d}{2} J$ besteht. **Hinweis:** Ersetzen Sie wie im Punkt (a) die Summe durch ein Integral und führen Sie eine partielle Integration durch.

(c) (2 Punkte) Skizzieren Sie die Fermi-Dirac-Verteilung als Funktion der Einteilchenenergie ε im Fall $T = 0$ und $T > 0$. Wo liegt die Fermienergie ε_F?

Nützliche Formeln

F1: $$\left\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_j}\right\rangle = \left\langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_j}\right\rangle = k_B T \delta_{ij}$$

F2: $$\int\limits_{\xi_1^2+\ldots+\xi_d^2 \le R^2} d\xi_1 \ldots d\xi_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} R^d$$