Name:
Matrikelnummer:
Zahl der abgegebenen Blätter (exklusive Angabe):

2. Test - 22.6.2018

Ideales Gas im Schwerefeld (14 Punkte)

Betrachten Sie ein klassisches ideales Gas aus N Teilchen der Masse m, welches sich in einem Zylinder mit Radius R und unbegrenzter Höhe befindet. Der Boden des Zylinders sei bei $z = 0$ und für alle Teilchen gelte $z_i > 0$. Zusätzlich wirke das Schwerefeld $V(x, y, z) = mgz$. Das Gas befinde sich im thermischen Gleichgewicht mit einer Umgebung der Temperatur T. Die Hamiltonfunktion des Gases ist gegeben durch

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + mgz_i \right) .$$

(a) (5 Punkte) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K unter Annahme einer homogenen Temperaturverteilung.

Lösung:

$$\begin{aligned} Z_\mathrm{K} &= \frac{1}{N!h^{3N}} \int e^{-\beta H} d^{3N}q d^{3N}p \\ &= \frac{1}{N!h^{3N}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} dp \right)^{3N} \left(\pi R^2\right)^N \left(\int_0^{\infty} e^{-\beta mgz} dz \right)^N \\ &= \frac{1}{N!h^{3N}} \left(\frac{2m\pi}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}} \left(\frac{\pi R^2}{\beta mg} \right)^N \end{aligned}$$

(b) (3 Punkte) Verwenden Sie den Gleichverteilungssatz (Formel **F1**) um die mittlere Energie $\langle E \rangle$ zu berechnen.

Lösung:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \sum_{i=1}^{N} \left(\left\langle \frac{p_{x,i}^2}{2m} \right\rangle + \left\langle \frac{p_{y,i}^2}{2m} \right\rangle + \left\langle \frac{p_{z,i}^2}{2m} \right\rangle + \left\langle mgz_i \right\rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \left\langle p_{x,i} \frac{\partial H}{\partial p_{x,i}} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle p_{y,i} \frac{\partial H}{\partial p_{y,i}} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle p_{z,i} \frac{\partial H}{\partial p_{z,i}} \right\rangle + \left\langle z_i \frac{\partial H}{\partial z_i} \right\rangle \right) \\ &= N \left(\frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T + k_B T \right) = \frac{5}{2} N k_B T \end{aligned}$$

(c) (3 Punkte) Bestätigen Sie ihr Resultat in Punkt (b), indem Sie die mittlere Energie $\langle E \rangle$ aus der kanonischen Zustandssumme Z_K berechnen.

Lösung:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{N!h^{3N}} \frac{1}{Z_\mathrm{k}} \int H e^{-\beta H} d^{3N}q d^{3N}p = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_\mathrm{k} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\frac{1}{N!h^{3N}} \left(\frac{2m\pi}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}} \left(\frac{\pi R^2}{\beta mg} \right)^N \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\frac{1}{\beta^{5N/2}} \right) = \frac{5N}{2} k_B T \end{aligned}$$

(d) (3 Punkte) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $w(z)dz$, dass die Höhe z eines zufällig herausgegriffenen Teilchens im Intervall $[z, z+dz]$ liegt?

Lösung:

$$w(z) = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{-\beta V} = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{-\beta m g z}$$

Die Normierung $\mathcal{N}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{N} = \int_0^\infty e^{-\beta m g z} dz = \frac{1}{\beta m g}.$$

Ideales Gas in einem Gefäß mit permeablen Wänden (14 Punkte)

Betrachten Sie ein Gefäß mit Volumen V, in dem sich ein klassisches ideales Gas aus Teilchen der Masse m befindet. Die Wände seien durchlässig für Teilchen und Wärme. Die Umgebung sei durch die Temperatur T und das chemische Potential μ charakterisiert.

(a) (5 Punkte) Durch welches Ensemble wird das System beschrieben? Berechnen Sie die entsprechende Zustandssumme und geben Sie die zugehörige Phasenraumdichte an.

Lösung:

Beschrieben durch das Großkanonische Ensemble.

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{GK}} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N! h^{3N}} \int e^{-\beta H} d^{3N}q d^{3N}p \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N V^N}{N! h^{3N}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} dp \right)^{3N} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N V^N}{N! h^{3N}} \left(\frac{2m\pi}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}} = \exp\left(Vz \left(\frac{2m\pi}{\beta h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) = \exp\left(\frac{Vz}{\lambda_T^3} \right). \end{aligned}$$

Die Phasenraumdichte ist gegeben durch

$$\rho_{\mathrm{GK}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{GK}}} e^{-\beta(H-\mu N)}$$

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie die mittlere Teilchenanzahl $\langle N \rangle$ und zeigen Sie, dass die Varianz $\Delta N^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ gegeben ist durch

$$\Delta N = \sqrt{\langle N \rangle}.$$

Lösung:

$$\langle N \rangle = \frac{1}{Z_{\mathrm{GK}}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N! h^{3N}} N \int e^{-\beta(H-\mu N)} d^{3N}q d^{3N}p = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_{\mathrm{GK}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{Vz}{\lambda_T^3} \right) = \frac{Vz}{\lambda_T^3}$$

$$\langle N^2 \rangle = \frac{1}{Z_{\mathrm{GK}}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N! h^{3N}} N^2 \int e^{-\beta(H-\mu N)} d^{3N}q d^{3N}p = \frac{1}{Z_{\mathrm{GK}}} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \mu} Z_{\mathrm{GK}} = \left(\frac{Vz}{\lambda_T^3} \right)^2 + \frac{Vz}{\lambda_T^3}$$

Daher gilt $\Delta N^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \frac{Vz}{\lambda_T^3} = \sqrt{\langle N \rangle}$

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie das chemische Potential μ als Funktion von $\langle N\rangle, T, V$.

Lösung:

$$\frac{Vz}{\lambda_T^3} = \langle N\rangle \to \mu = k_B T \ln\left(\frac{\langle N\rangle}{V}\lambda_T^3\right)$$

(d) (2 Punkte) Welches Kriterium zwischen thermischer Wellenlänge λ_T und mittlerem Teilchenabstand $\bar{l} = (V/\langle N\rangle)^{\frac{1}{3}}$ gibt an, ob das Gas klassisch behandelt werden kann?

Lösung:

Das Gas kann klassisch behandelt werden wenn $\lambda_T < \bar{l}$ gilt.

Bosonen im Zwei-Zustands-System (10 Punkte)

Betrachten Sie ein System bestehend aus zwei nicht wechselwirkenden ununterscheidbaren Bosonen (Spin $s = 0$), die jeweils zwei Einteilchenzustände $|0\rangle$, $|1\rangle$ mit Einteilchenenergien $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ annehmen können. Das System sei an ein Wärmebad der Temperatur T gekoppelt.

(a) (2 Punkte) Welche Werte E_j für die Gesamtenergie sind in diesem System möglich? Welches Verhalten haben die zugehörigen Eigenzustände $|E_j\rangle$ bei Teilchenvertauschung?

Lösung:

Mögliche Werte der Gesamtenergie sind $E_0 = 2\epsilon_0$, $E_1 = \epsilon_0 + \epsilon_1$, $E_2 = 2\epsilon_1$. Die Eigenfunktionen sind symmetrisch bezüglich Teilchenvertauschung.

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_{K} sowie die Dichtematrix ρ_{K} in der Basis der Eigenzustände $|E_j\rangle$.

Lösung:

Die Zustandssumme ist gegeben durch:

$$Z_{\mathrm{K}} = \mathrm{Spur}(e^{-\beta\hat{H}}) = e^{-\beta 2\epsilon_0} + e^{-\beta(\epsilon_0+\epsilon_1)} + e^{-\beta 2\epsilon_1}$$

Die Dichtematrix lautet:

$$\hat{\rho}_{\mathrm{K}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{K}}} e^{-\beta\hat{H}} \to \rho_{\mathrm{K}}^{\{|E_j\rangle\}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{K}}}\begin{pmatrix} e^{-\beta 2\epsilon_0} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta(\epsilon_0+\epsilon_1)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta 2\epsilon_1} \end{pmatrix}$$

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Dichtematrix ρ_{K} im Limes $T \to 0$ in einen reinen Zustand übergeht.

Lösung:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\to\infty} \mathrm{Spur}(\rho_{\mathrm{K}}^2) &= \lim_{\beta\to\infty} \frac{e^{-\beta 4\epsilon_0} + e^{-\beta 2(\epsilon_0+\epsilon_1)} + e^{-\beta 4\epsilon_1}}{(e^{-\beta 2\epsilon_0} + e^{-\beta(\epsilon_0+\epsilon_1)} + e^{-\beta 2\epsilon_1})^2} \\ &= \lim_{\beta\to\infty} \frac{1 + e^{-\beta 2(\epsilon_1-\epsilon_0)} + e^{-\beta 4(\epsilon_1-\epsilon_0)}}{(1 + e^{-\beta(\epsilon_1-\epsilon_0)} + e^{-\beta 2(\epsilon_1-\epsilon_0)})^2} = 1 \end{aligned}$$

(d) (2 Punkte) Welchen Wert hat die Entropie S allgemein im Limes $T \to 0$. Wie wird dieses Resultat genannt?

Lösung:

Für Systeme mit nichtentartetem Grundzustand gilt immer $\lim_{T\to 0} S = 0$ (3. Hauptsatz).

Ideales Fermigas in d-dimensionaler Box (12 Punkte)

Betrachten Sie ein ideales Fermigas ($s = \frac{1}{2}$) bestehend aus Teilchen der Masse m in einer d-**dimensionalen** Box mit Volumen L^d, welches sich in Kontakt mit einer Umgebung der Temperatur T und chemischem Potential μ befindet. Die Energie der Einteilchenzustände sei gegeben durch ε_i.

(a) (5 Punkte) Berechnen Sie die mittlere Energie $\langle E \rangle$, indem Sie mithilfe der klassischen mikrokanonischen Zustandssumme eines Teilchens $\Omega_1(\varepsilon)$ die Summe

$$\langle E \rangle = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$$

in ein Integral umschreiben. **Hinweis:** Formel **F2** ist hilfreich zur Berechnung von $\Omega_1(\varepsilon)$.

Lösung:

Mit der klassischen mikrokanonischen Zustandssumme eines Teilchens

$$\Omega_1(\varepsilon) = \frac{1}{h^d} \int \delta(\varepsilon - H_1) d^d q d^d p = \frac{1}{h^d} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int\limits_{H_1 < \varepsilon} d^d q d^d p$$

$$= \frac{L^d}{h^d} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} (2m\varepsilon)^{\frac{d}{2}} \right) = \frac{d}{2} \left(\frac{2m\pi L^2}{h^2} \right)^{\frac{d}{2}} \frac{\varepsilon^{\frac{d}{2}-1}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$$

ergibt sich für die mittlere Energie

$$\langle E \rangle = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} = \int_0^\infty (2s+1) \frac{\Omega_1(\varepsilon) \varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} d\varepsilon$$

$$= d \left(\frac{2m\pi L^2}{h^2} \right)^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{d}{2}}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} d\varepsilon$$

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass zwischen der mittleren Energie $\langle E \rangle$ und dem großkanonischen Potential

$$J = -k_B T \sum_i \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)})$$

der Zusammenhang $\langle E \rangle = -\frac{d}{2} J$ besteht. **Hinweis:** Ersetzen Sie wie im Punkt (a) die Summe durch ein Integral und führen Sie eine partielle Integration durch.

Lösung:

$$J = -k_B T \sum_i \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}) = -k_B T \int_0^\infty (2s+1) \Omega_1(\varepsilon) \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}) d\varepsilon$$

Partielle Integration mit $\Omega_1(\varepsilon) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varepsilon}$ ergibt

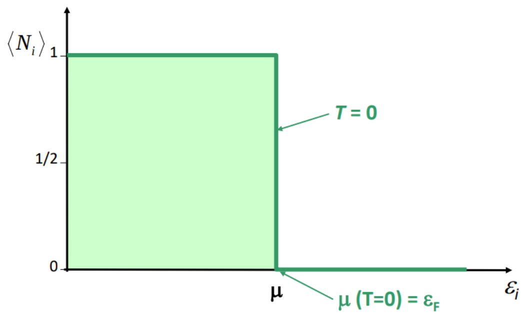
$$J = -k_B T (2s+1) \Phi_1(\varepsilon) \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}) \Big|_0^\infty + k_B T \int_0^\infty (2s+1) \Phi_1(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big[\ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}) \Big] d\varepsilon$$

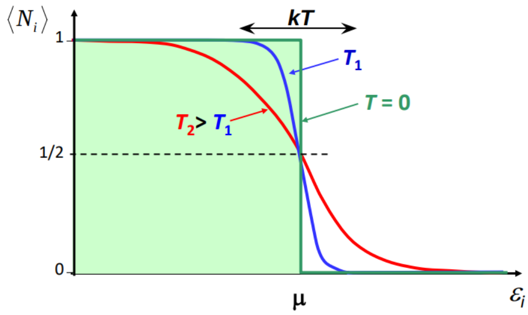
$$= -\int_0^\infty \frac{(2s+1)\Phi_1(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} d\varepsilon = -2 \left(\frac{2m\pi L^2}{h^2} \right)^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{d}{2}}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} d\varepsilon = -\frac{2}{d} \langle E \rangle$$

(c) (2 Punkte) Skizzieren Sie die Fermi-Dirac-Verteilung als Funktion der Einteilchenenergie ε im Fall $T = 0$ und $T > 0$. Wo liegt die Fermienergie ε_{F}?

Lösung:

Verhalten der Fermifunktion:





Nützliche Formeln

$$\textbf{F1:} \quad \left\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\rangle = \left\langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_j} \right\rangle = k_B T \delta_{ij}$$

$$\textbf{F2:} \quad \int\limits_{\xi_1^2 + \ldots + \xi_d^2 \leq R^2} d\xi_1 \ldots d\xi_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} R^d$$