Lösungen zum 1.Tutorium VU Statistische Physik I, 9.3.2018

1. **Homogene Funktionen**

   a) Zeigen Sie, dass für eine homogene Funktion $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k f(x, y, z)$ vom Grad k die folgende Relation gilt:

   $$kf(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{\partial f}{\partial z}z. \tag{1}$$

   Lösung:

   Ableitung von $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k f(x, y, z)$ nach λ liefert:

   $$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \lambda}f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &= \frac{\partial f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}{\partial \lambda x}x + \frac{\partial f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}{\partial \lambda y}y + \frac{\partial f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}{\partial \lambda z}z \\ &= k\lambda^{k-1}f(x, y, z).\end{aligned}$$

   Relation (1) folgt nun durch Setzten von $\lambda = 1$.

   b) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion (c ist eine Konstante)

   $$E(S, V, N) = \frac{3}{2}\frac{k_B N^{5/3}}{cV^{2/3}} \exp\left(\frac{2S}{3Nk_B} - \frac{5}{3}\right)$$

   eine homogene Funktion vom Grad $k = 1$ ist und Gleichung (1) erfüllt.

   Lösung:

   Die Berechnung von $E(\lambda S, \lambda V, \lambda N)$ ergibt $E(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda E(S, V, N)$. Daher ist diese Funktion homogen vom Grad $k = 1$. Explizites Berechnen der Ableitungen liefert:

   $$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial S} &= \frac{2}{3Nk_B}E \\ \frac{\partial E}{\partial V} &= -\frac{2}{3}\frac{E}{V} \\ \frac{\partial E}{\partial N} &= \frac{5}{3}\frac{E}{N} - \frac{2S}{3N^2k_B}E\end{aligned}$$

   und schließlich

   $$\frac{\partial E}{\partial S}S + \frac{\partial E}{\partial V}V + \frac{\partial E}{\partial N}N = \frac{2S}{3Nk_B}E - \frac{2E}{3} + \frac{5E}{3} - \frac{2S}{3Nk_B}E = E.$$

2. **Vollständige Differentiale**

a) Ist das folgende Differential

$$\delta f(x,y) = p(x,y)dx + q(x,y)dy,$$

mit $p(x,y) = 2yx^2 + y^3$ und $q(x,y) = 2xy^2 + x^3$ vollständig? Wenn nicht, bestimmen Sie die Funktion $\alpha(x,y)$ (integrierender Faktor) so, dass

$$df(x,y) = \alpha(x,y)p(x,y)dx + \alpha(x,y)q(x,y)dy$$

vollständig ist. **Hinweis**: setzen Sie $\alpha(x,y)$ als Funktion von $t = xy$ an $\alpha(x,y) = \alpha(xy)$ und verwenden Sie die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha(xy)p(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha(xy)q(x,y)\right].$$

Lösung:

Explizites Berechnen der Integrabilitätsbedingung für δf ergibt:

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = (2x^2 + 3y^2) - (2y^2 + 3x^2) = y^2 - x^2 \neq 0,$$

daher ist δf nicht vollständig. Die Integrabilitätsbedingung mit integrierendem Faktor ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha p}{\partial y} &= \alpha'(xy)x(2yx^2 + y^3) + \alpha(xy)(2x^2 + 3y^2)\\ \frac{\partial \alpha q}{\partial x} &= \alpha'(xy)y(2xy^2 + x^3) + \alpha(xy)(2y^2 + 3x^2).\end{aligned}$$

Gleichsetzten liefert:

$$\frac{\partial \alpha p}{\partial y} - \frac{\partial \alpha q}{\partial x} = \alpha'(xy)(2yx^3 + xy^3 - 2xy^3 - yx^3) + \alpha(xy)(y^2 - x^2) = 0$$

und weiters:

$$\alpha'(xy) = \frac{x^2 - y^2}{2yx^3 + xy^3 - 2xy^3 - yx^3}\alpha(xy) = \frac{1}{xy}\alpha(xy)$$

Wenn man will kann man

$$\alpha'(t) = \frac{1}{t}\alpha(t)$$

durch Separation der Konstanten lösen, sonst sieht man auch durch Hinsehen dass $\alpha'(xy) = cxy$ die allgemeine Lösung ist, wobei c eine beliebige Konstante ist.

b) Wie lautet das zugehörige Potential $f(x,y)$?

Lösung:

Um das Potential $f(x,y)$ aus

$$df(x,y) = (2y^2x^3 + xy^4)dx + (2x^2y^3 + yx^4)dy$$

zu bestimmen verwendet man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2x^3 + xy^4 \to f(x,y) = \frac{1}{2}y^2x^4 + \frac{1}{2}x^2y^4 + C(y).$$

Um $C(y)$ zu bestimmen setzte man ein in

$$\frac{\partial f}{\partial y} = yx^4 + 2x^2y^3 + C'(y) = 2x^2y^3 + yx^4,$$

woraus folgt

$$C'(y) = 0 \to C(y) = const$$

3. **Partielle Ableitung**

$f(x,y)$ und $g(x,y)$ sind Funktionen von x und y. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1}.$$

Lösung:

Das Differential zu $f(x,y)$ ist gegeben durch

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy.$$

Unter der Bedingung

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x dy = 0 \to dy = -\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1} dx$$

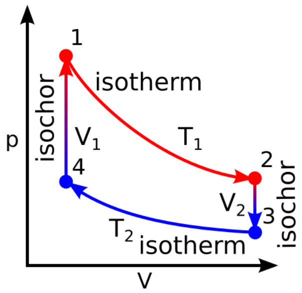
kann das Differential df umgeschrieben werden als

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1} dx.$$

Nach Division durch dx ergibt sich die zu beweisende Formel.

4. **Stirling Motor**

a) Berechnen Sie den Wirkungsgrad des Stirling'schen Kreisprozesses unter der Annahme, dass durch die Verwendung des Regenerators 95% der im Schritt (2→3) abgeführten Wärme Q_{23} im Schritt (4→1) wiederverwendet werden kann. Das Arbeitsmedium kann durch ein ideales Gas angenähert werden.



.

Lösung:

Die aufgenommen Wärme in den einzelnen Schritten ist:

$$Q_{12} = \int pdV = \int \frac{Nk_BT_1}{V}dV = Nk_BT_1\ln(\frac{V_2}{V_1})$$

$$Q_{23} = -\frac{3}{2}Nk_B(T_1 - T_2)$$

$$Q_{34} = -Nk_BT_2\ln(\frac{V_2}{V_1})$$

$$Q_{41} = \frac{3}{2}Nk_B(T_1 - T_2).$$

Laut 1.Hauptsatz ist die gesamte geleistete Arbeit

$$\Delta W = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} = Nk_B(T_1 - T_2)\ln(\frac{V_2}{V_1}).$$

Wenn 95% von Q_{23} wiederverwendet werden können ist die effektiv zugeführte Wärmemenge

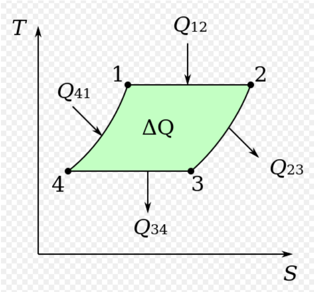
$$Q_{zu} = Q_{12} + Q_{41} + 0.95Q_{23} = Nk_BT_1\ln(\frac{V_2}{V_1}) + 0.05\frac{3}{2}Nk_B(T_1 - T_2)$$

und damit der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\Delta W}{Q_{zu}} = \frac{(T_1 - T_2)\ln(\frac{V_2}{V_1})}{T_1\ln(\frac{V_2}{V_1}) + 0.05\frac{3}{2}(T_1 - T_2)}$$

b) Stellen Sie den Kreisprozess im T-S-Diagramm dar und zeichnen Sie die zugeführte Wärme Q_{in} und die abgeführte Wärme Q_{ab} als Flächen ein. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Änderung der Wärmemenge $\Delta Q = Q_{\text{ab}} - Q_{\text{in}}$ und geleisteter Arbeit?

Lösung:



Die Isochoren lassen sich im T-S-Diagramm aufgrund

$$C_V dT = TdS \rightarrow T(S) = const * e^{S/C_V}$$

als Exponentialfunktion darstellen. Die Fläche unter den entsprechenden Teilschritten ist die zu- bzw. abgeführte Wärme. Laut dem 1.Hauptsatz ist die Änderung der Wärmemenge ΔQ gleich der geleisteten Arbeit.

c) Welchen Wirkungsgrad erhalten Sie wenn 100% der abgeführten Wärme Q_{23} im Schritt (4→1) wiederverwendet werden kann? Welcher bekannte Kreisprozess hat den gleichen Wirkungsgrad?

Lösung:

Der Wirkungsgrad des Stirlingmotors mit perfektem Regenerator ist

$$\eta = \frac{\Delta Q}{Q_{12}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Dies ist der gleiche Wirkungsgrad wie der des Carnot Prozesses. Dieser Zusammenhang ist geometrisch ersichtlich da sich die eingeschlossene Fläche ΔQ und die zugeführt Wärme Q_{12} nicht ändern, wenn die isochoren Teilschritte $(2 \rightarrow 3)$ und $(4 \rightarrow 1)$ in adiabatische Teilschritte umgewandelt werden.

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1/2/3/4a/4bc